Parte IV

Crecimiento de largo plazo

Capítulo 10

Introducción al crecimiento económico

Hasta el momento hemos analizado los componentes de la demanda agregada y el equilibrio de pleno empleo en economías abiertas y cerradas. En economías abiertas, la variable de ajuste a diferencias de producción y gasto (demanda) es el déficit en la cuenta corriente y el tipo de cambio real. En una economía cerrada el equilibrio se logra a través de movimientos en la tasa de interés, que equilibra la demanda y oferta de fondos. En esta parte estudiaremos cómo evoluciona la producción de pleno empleo de una economía a través del tiempo. Nuestras principales interrogantes a responder son: ¿Por qué algunos países han crecido más rápidamente que otros? ¿Cuáles son las características principales que diferencian a estos países? ¿Pueden algunas variables de política afectar el crecimiento de largo plazo?[1]

Aquí nos concentramos principalmente en economías cerradas, aunque después de enfatizar la importancia del análisis de economías abiertas, parecería decepcionante volver a cerrar la economía. Sin embargo, no hay grandes diferencias entre considerar una economía abierta o cerrada, salvo, por supuesto, para analizar tópicos específicos de economías abiertas. El crecimiento de largo plazo depende del crecimiento de la productividad y la velocidad a la que crece el capital en la economía, es decir, de la inversión. Nosotros estudiamos que en una economía abierta la inversión no necesariamente iguala al ahorro, lo que podría hacer suponer que es muy distinto tratar de entender el crecimiento en una economía abierta que en una economía cerrada. No obstante, la

[1] La teoría del crecimiento económico tuvo un gran desarrollo con los trabajos de Solow a fines de la década de 1950 y principios de los sesenta, para después pasar por un período de baja actividad hasta mediados de la década de 1980, cuando tuvo un gran auge con el desarrollo de los modelos de crecimiento endógeno y el uso de amplias bases de datos para análisis empírico. Muy buenos libros de nivel intermedio son Jones (2000) y Sala-i-Martin (2000). Un muy buen libro avanzado y que ha influido mucho en estos capítulos es Barro y Sala-i-Martin (2003). Ver también Aghion y Howitt (1997), para temas avanzados de crecimiento.

evidencia empírica —tal como fue discutido en el capítulo 7 a raíz del puzzle de Feldstein y Horioka— muestra que, en el largo plazo, los países que ahorran más también invierten más. En otras palabras, en el largo plazo las diferencias entre ahorro e inversión no son muy grandes, por lo cual considerar una economía cerrada no representa un mal supuesto. Es decir, la evidencia empírica dice que, si bien los países pasan por períodos de superávit y déficit, estos son menores respecto de los niveles de ahorro e inversión. Por ejemplo, es normal ver países con tasas de ahorro e inversión en los niveles de 20 a 30 por ciento, pero los déficits en la cuenta corriente están entre 0 y 5 por ciento. Ha habido mucha investigación sobre las razones para esta relación, y un buen candidato es la falta de movilidad perfecta de capitales en el largo plazo. Hay quienes dicen que esto ocurre porque el capital humano no es móvil. Aunque en su mayoría estos modelos son de economía cerrada, en el capítulo 14 se presenta con más detalle este caso. También se discutirá la evidencia sobre apertura y crecimiento. Con todo, para entender la mecánica básica del crecimiento, un modelo de economía cerrada entrega muchas luces al respecto.

10.1. ¿Por qué es importante el crecimiento?

Para responder la pregunta, realizaremos un simple ejercicio numérico. Supongamos que existen tres países: A, B y C. Estos tres países tienen en el año 0 el mismo producto per cápita de 100. La única diferencia es la tasa a la cual crecen: el país A crece un 1 % anual; el B un 3 %, y el C un 5 %. Estas cifras son razonables, en la medida que en el siglo XX se observan crecimientos per cápita de 1 a 3 por ciento, y el crecimiento rápido, en períodos algo más cortos, es de 5 %, o incluso más.

El cuadro 10.1 resume el nivel del producto per cápita que tendría un país que parte con un nivel de 100 el año 0, después de crecer durante 30, 50 y 100 años a las tasas anuales indicadas en la primera columna[2].

Cuadro 10.1: Escenarios de crecimiento (Año 0=100)

Crecimiento anual	30 años	50 años	100 años
1 %	130	160	300
3 %	250	450	2.000
5 %	430	1.100	13.000

[2]Los números del cuadro 10.1 están aproximados a las decenas. Se obtienen al calcular $x_t = 100 \times (1+\gamma)^t$, donde x_t es el producto per cápita al año t si el PIB inicial al año 0 era 100 y γ la tasa de crecimiento del PIB per cápita.

En el cuadro 10.1 se puede apreciar que, después de cien años, el país A tiene un producto per cápita tres veces superior que el de inicios del período, mientras que en el país B es veinte veces superior, y en C, 130. Estas diferencias, que pueden parecer moderadas, se magnifican exponencialmente con el correr del tiempo. Este simple ejercicio muestra que crecer más rápidamente implica para el país C tener, al cabo de treinta, cincuenta y cien años, una *calidad de vida* sustancialmente mejor que B, y por sobre todo que A.[3] Incluso en un lapso de tres décadas la diferencia es significativa, por cuanto C multiplica por más de 4 su PIB per cápita, mientras en A aumenta apenas un 30 %. En ese lapso, dos economías que parten con el mismo ingreso, se distancian, y la que crece más rápidamente tiene, al cabo de treinta años, el triple del ingreso, y siete veces más en cincuenta años.

A partir de este simple ejercicio, podemos entender que crecer es muy importante porque permite mejorar los ingresos promedio de un país. Diferenciales moderados de crecimiento en el corto plazo pueden hacer diferencias abismantes si persisten en el tiempo. De hecho, otra forma de ilustrar estas diferencias es calculando el número de años que toma a un país duplicar su ingreso si crece a una tasa $\gamma\times$ 100 %. Una buena aproximación es que el número de años para duplicar el PIB per cápita es igual a 70 dividido por la tasa de crecimiento, expresada en porcentajes. Es decir, creciendo al 1 % el producto se duplica en 70 años, y lo hace solo en 20 si la tasa de crecimiento es 3,5 %[4].

Sin duda que, desde el punto de vista del bienestar, no solo importan el crecimiento y el nivel de ingreso agregado, sino que también su distribución. Se podría pensar que el escenario de crecimiento de 5 %, ocurre porque una pequeña fracción de la población disfruta del crecimiento muy acelerado de sus ingresos, mientras que las otras se estancan. Ese sería un caso en el cual podríamos cuestionar la efectividad del crecimiento para aumentar el bienestar.

A este respecto se deben hacer dos observaciones. La primera es que una economía donde algunos ven crecer sus ingresos a 5 % y otros a 3 % es mejor —en un sentido de Pareto— a una economía donde a todos les crece el ingreso a un 2 %, a pesar de que en la primera la distribución del ingreso se hace más desigual. Más aún, en una economía en la que hay mayor crecimiento de todos, la reducción de la pobreza es más rápida. En segundo lugar, la evidencia empírica no sustenta la hipótesis de que en el largo plazo las economías que crecen más rápido ven su distribución de ingresos más desigual, al menos no existe evidencia que muestre que, con el crecimiento económico, el ingreso de los más pobres disminuya. Pudiera haber un aumento de la desigualdad en algunas de las fases de crecimiento, o sea, el ingreso de los más ricos crece

[3]En el capítulo 2 se discuten algunos problemas del PIB como indicador de bienestar.

[4]Esta aproximación viene del hecho de que queremos conocer N en la siguiente ecuación: $(1+\gamma)^N = 2$. Tomado logaritmo (natural), se llega a: $N\log(1+\gamma) = \log 2$. Aproximando $\log(1+z) \approx z$ y usando el hecho de que $\log 2 = 0{,}693$, tenemos $N = 0{,}693/\gamma \approx 70/(\gamma\times 100)$.

más que el de los más pobres, pero no lo suficiente como para resultar en que el bienestar de los de menos ingresos baje con el crecimiento elevado. Por lo tanto, podemos asumir de manera bastante realista que, en países que logran crecer de manera sostenida por largos períodos de tiempo, toda la población está mejor que si este crecimiento no hubiera ocurrido. Además, en una economía que logra elevados niveles de ingreso, el gobierno debiera contar con más posibilidades de asegurar que toda la población tuviera acceso al mayor crecimiento[5].

10.2. La evidencia

En esta sección mostraremos evidencia internacional respecto al crecimiento de los países. La teoría que mostraremos más adelante intenta explicar lo que observamos en la realidad. Para comenzar, haremos algunas aclaraciones respecto de la medición del PIB para comparar entre países.

10.2.1. Medición del PIB a PPP

Cuando definimos el PIB, en el capítulo 2, planteamos que para comparar a través del tiempo la producción de una economía deberíamos usar el PIB real. La idea es que el PIB nominal varía debido a que cambian los precios de los bienes y su cantidad producida. Entonces, lo que se hace es usar los precios de un año base para medir el PIB real y así aislar el efecto cantidad del efecto precio.

Al hacer comparaciones internacionales de PIB, tenemos el mismo problema. Si hubiera PPP en el mundo —es decir, si los precios de todos los bienes fueran los mismos en todas partes—, no tendríamos problemas. En ese caso, bastaría con tomar el PIB de un país en moneda local, dividirlo por el tipo de cambio (precio del dólar) y tener un PIB medido directamente en dólares y comparable internacionalmente. Pero sabemos que PPP no es válida. Para empezar, el precio de los bienes no transables no es el mismo: arrendar un departamento en Nueva York no cuesta lo mismo que arrendar el mismo departamento en Bombay.

Por tanto, el PIB entre países será distinto no solo porque producen a distintas cantidades, sino además, porque los precios de bienes iguales difieren entre países. En definitiva, uno quisiera comparar el PIB de los países a precios comunes. Esto es precisamente lo que hace el *International Comparison*

[5] Sin duda que el crecimiento puede llevar a tensiones no menores. El daño al medio ambiente es un caso típico. Pero hay políticas públicas, basadas en la teoría microeconómica, que pueden aliviar dichos problemas minimizando su impacto sobre el crecimiento. De ahí surgen muchas de las ideas de crecimiento sustentable. Asimismo, la evidencia tampoco muestra que las naciones más ricas tienen peor medio ambiente; por el contrario, sugiere que los países más ricos demandan un mejor medio ambiente, y tienen los recursos para conseguirlo.

Program (ICP), del Banco Mundial, que calcula el PIB para cada país corregido por PPP, también conocido como PIB medido a precios internacionales[6]. Esta es una medición a PPP, porque considera el mismo precio para un mismo bien en todo el mundo.

La idea es construir precios para un gran número de bienes y usarlos para valorar el PIB de cada país. Estos precios internacionales son una especie de precio promedio de los bienes, y usan como ponderador la participación del gasto de cada país en ese bien. Luego, los precios se expresan en dólares y se normalizan con los de Estados Unidos, y por ello los datos que se presentan en este capítulo corresponden a precios internacionales en dólares de 1996.

Como se podrá concluir, este procedimiento es muy distinto que medir el PIB en moneda doméstica y transformarlo directamente a dólares dividiendo por el tipo de cambio. Esa es una medida de cuántos dólares se recibirían por el PIB, pero no es útil para comparar la producción física entre países.

Lo que se observa en los datos es que el PIB medido directamente en dólares muestra mayores diferencias en el plano internacional que cuando el PIB se corrige por PPP. Esto es esperable según la teoría de Harrod, Balassa y Samuelson (HBS) estudiada en el capítulo 9. Según HBS, los países más pobres, por sus bajos niveles de productividad, deberían tener salarios más bajos y bienes más baratos. En consecuencia, 1.000 dólares en un país de bajos ingresos compran muchos más bienes que 1.000 dólares en un país industrializado. Por ello, el PIB de los países más pobres corregido por PPP es mayor que el que se obtiene de convertir directamente el PIB de dicho país usando el tipo de cambio de mercado. Esto es, efectivamente, lo que se observa en los datos. El nivel de precios es más alto en los países de mayores ingresos[7]. Al normalizar el PIB a PPP con el de los Estados Unidos, se tendrá que, prácticamente para todos los países no industriales, su PIB a PPP será superior al PIB convertido a dólares usando el tipo de cambio de mercado.

Los datos del ICP permiten calcular la razón entre el tipo de cambio implícito en el cálculo del PIB a PPP[8] y el tipo de cambio de mercado (o tipo de cambio oficial). Dado que se usa el dólar de Estados Unidos para normalizar las cifras, la razón entre ambos tipos de cambio para este país es 1. En cambio esta razón es menor para países de menor ingreso, ya que habría que

---

[6] Este proyecto es de larga data e incluye a muchas instituciones en su construcción. Dio origen a las Penn World Tables, que es la base de datos más completa para comparaciones internacionales, y que ha sido ampliamente usada para las investigaciones sobre crecimiento económico. Una descripción de ellas se puede encontrar en Summers y Heston (1991), y también se puede revisar en la página web del Banco Mundial bajo International Comparison Program. Este es un trabajo gigantesco que, naturalmente, no será detallado aquí. Por ejemplo, una complicación no menor es considerar bienes idénticos entre países, o extrapolar el precio a países que no reportan algunas —o todas— las categorías de bienes.

[7] Ver, por ejemplo, Summers y Heston (1991) y Obstfeld y Rogoff (1996), capítulo 4.1.

[8] Este tipo de cambio implícito tiene una lógica similar a la del deflactor implícito del PIB.

tener una moneda más apreciada —o lo que es lo mismo a tener un dólar más depreciado— para que su PIB medido al tipo de cambio de mercado, iguale al PIB medido a PPP. Así, por ejemplo, en el 2002 esta razón era 0,3 para Brasil, Indonesia y Tailandia; 0,4 para Bolivia, Chile, Perú y Malasia; 0,6 para Corea, y 0,7 para México y Venezuela. Por lo general esta razón es menor en países africanos y de menores ingresos, donde en Etiopía es 0,1, y en China, Ghana, Haití y Namibia es 0,2. Por último, países como Japón, Suiza y Noruega tienen razones entre 1,1 y 1,5. Factores coyunturales, como una grave crisis cambiaria, pueden explicar por qué en algunos años esta razón puede ser muy distinta a lo que uno esperaría según el nivel de ingresos del país. Por ejemplo, en Argentina, después de la severa depreciación a fines de 2001, esta razón fue igual a 0,2 el año 2002. Por eso la razón entre el tipo de cambio implícito en las mediciones PPP y el tipo de cambio de mercado está también influida por la evolución de corto plazo del tipo de cambio.

10.2.2. El muy muy largo plazo

El crecimiento económico, mirado desde períodos muy antiguos, es un fenómeno reciente, tal como ha reportado en varias publicaciones Angus Maddison[9]. Comenzó a principios del siglo XIX, con la Revolución Industrial. El cuadro 10.2 muestra la evolución del PIB per cápita desde el año 1. Entre el año 1 y 1820, el PIB per cápita creció solo un 50 % en un lapso de ¡1.800 años! Esto representa una tasa de crecimiento promedio anual de aproximadamente 0,02 %. En cambio, el crecimiento entre 1820 y 1998 fue de 750 %, lo que representa un 1,2 % anual, es decir, 60 veces más que en el período previo. El cuadro muestra también cuál ha sido el crecimiento en distintas regiones del mundo. Claramente, los países que hoy son industrializados, son los que crecieron más rápidamente. En el otro extremo se sitúa África.

Muchas veces las economías crecen rápidamente porque el mundo entero está creciendo, por tanto se pueden buscar formas alternativas de comparar los resultados en materia de crecimiento de una economía. Eso es lo que se hace en el cuadro 10.3, donde se compara el PIB per cápita de las regiones del mundo como porcentaje del PIB per cápita de Estados Unidos. Esto es razonable en el siglo XX, cuando Estados Unidos es el país de mayor ingreso; sin embargo, como se observa en el cuadro, este no es el caso antes de 1820. De hecho, en 1700 solo África tenía un PIB per cápita menor que Estados Unidos. Estas cifras muestran claramente el avance de Estados Unidos respecto de las principales regiones del mundo.

El crecimiento de la economía mundial ha ido acompañado también de importantes cambios demográficos y en las condiciones de vida de la población.

[9] Angus Maddison es tal vez quien ha aportado más evidencia sobre el crecimiento económico desde períodos muy pasados. Ver Maddison (1982, 1995, 2001).

Cuadro 10.2: PIB per cápita en la economía mundial

	1	1000	1500	1820	1900	1913	1950	2000	2000/1820 *
Estados Unidos			400	1.257	4.091	5.301	9.561	28.129	22
Europa Occidental	450	400	771	1.204	2.893	3.458	4.579	19.002	16
Europa del Este	400	400	496	683	1.438	1.695	2.111	5.804	8
América Latina	400	400		692	1.109	1.481	2.506	5.838	8
Asia	449	449	568	581	638	696	712	3.817	7
África	430	425	414	420	601	637	894	1.464	3
Mundo	445	436	566	667	1262	1.525	2.111	6.012	9
Producción total (mm)	103	117	248	695	1.974	2.732	5.330	36.502	53
Población (m)	231	268	438	1.041	1.271	1.791	2.524	6.071	6

Fuente: Maddison (2001).
Nota: (m) millones y (mm) mil millones; Medición en dólares Geary-Khamis de 1990.
*Cuánto se multiplicó el PIB per cap. entre 1820 y el 2000

Cuadro 10.3: La economía mundial como fracción de los Estados Unidos

PIB per cap como frac. de EE.UU.	1500	1600	1700	1820	1870	1900	1950	2000
Europa Occidental	1,93	2,22	1,89	0,96	0,80	0,71	0,48	0,68
Europa del Este	1,24	1,37	1,15	0,54	0,38	0,35	0,22	0,21
América Latina				0,55	0,28	0,27	0,26	0,21
Asia	1,42	1,43	1,08	0,46	0,23	0,16	0,07	0,14
Africa	1,04	1,06	0,80	0,33	0,20	0,15	0,09	0,05
Estados Unidos /Promedio Mundial	0,70	0,67	0,85	1,89	2,78	3,23	4,55	4,76

Fuente: Maddison (2001).

Según Maddison, la esperanza de vida al nacer entre el año 0 y el año 1000 era 24 años, y en 1820 era de 26 años. Esta aumentó a 66 años en 1999, y llegó hasta 78 años en los países desarrollados. Es importante destacar, sin embargo, que en la antigüedad la esperanza de vida era muy baja porque la tasa de mortalidad era muy elevada. Por ejemplo, en el Egipto romano, a principios de la era cristiana, la tasa de mortalidad durante el primer año de vida era 329 por cada mil nacidos, y la esperanza de vida de alguien que sobreviviese más de un año se elevaba a 36 años (24/0.671). En el caso de Francia, por ejemplo, en 1820 la esperanza de vida era de 39 años, pero con una tasa de mortalidad de 181 por cada mil nacidos, lo que daba una esperanza de vida de 48 años para todos aquellos que vivieran más de un año. En la actualidad, las tasas de mortalidad infantil se miden respecto de los 5 años de vida, y estos valores fluctúan entre 30 y 60 por cada mil niños. El caso extremo es el de África al sur del Sahara, cuya tasa de mortalidad bajo 5 años es 170 por cada mil niños, y la esperanza de vida es la más baja del mundo: solo es 46 años[10].

[10]Según los datos compilados por el Banco Mundial, la esperanza de vida ha bajado a 46 años desde 50 en 1990, en gran medida como resultado del SIDA. En la actualidad, se estima que el 9 %

10.2.3. El siglo XX

El crecimiento durante el siglo XX se presenta en la figura 10.1 y en el cuadro 10.4[11]. Las disparidades del crecimiento son evidentes. Por ejemplo, en 1900 Argentina era el país de ingresos más altos en América Latina. En ese entonces, tenía un ingreso igual o superior que el de muchos países en Europa, y hoy día es menos de la mitad. No es sorprendente que sea uno de los países con menor crecimiento durante el siglo XX.

Las cifras también nos permiten distinguir en qué períodos se han producido los famosos milagros económicos. En Asia, el crecimiento de Japón ocurrió después de la Segunda Guerra Mundial, mientras que el de Corea comenzó algo después, entre las décadas de 1950 y 1960. En el gráfico también se observa la crisis asiática de 1997. China —la nueva estrella del crecimiento— comienza a crecer más rápidamente hacia fines de la década de 1980.

El crecimiento de América Latina es dispar y decepcionante. La escala del PIB per cápita en la región es menos de la mitad que el de las otras regiones. Venezuela, por ejemplo, tuvo un acelerado crecimiento en la posguerra, pero el PIB per cápita, medido a PPP desde la década de 1960, ha caído. En Brasil se observa el llamado milagro económico ocurrido entre las décadas de 1960 y 1970. Por último, se observa el acelerado crecimiento de la economía chilena desde mediados de la década de 1980. Entre 1900 y 1973, el PIB per cápita de Chile creció a una tasa anual de 1,3 %, que se sitúa en el rango bajo del crecimiento del siglo XX. Luego, el crecimiento se redujo a un 0,2 % entre 1973 y 1985, para luego elevarse a un excepcional 5,4 % en los últimos quince años del siglo pasado.

Las cifras muestran que el crecimiento de los países durante el siglo XX se situó entre 1 y 3 por ciento. La evolución del PIB per cápita demuestra la gran diferencia que pueden representar tasas de crecimiento dispares: aunque en un horizonte anual puedan parecer modestas, la persistencia en el tiempo de dichas tasas puede significar enormes diferencias en el nivel de ingreso per cápita. El contraste entre Chile y Noruega, o entre Argentina y Canadá, es una clara ilustración de esto.

---

de las mujeres están infectadas con VIH.

[11]Existen dos metodologías para calcular los precios internacionales para medir el PIB a PPP: la de Geary y Khamis y la de Eltöto, Kovacs y Szulc. Los datos de Maddison se construyen usando el método de Geary y Khamis.

Cuadro 10.4: PIB p.c. y crecimiento medio anual 1900-2003 (dólares Geary-Khamis 1990)

	1900	1913	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2003	Crec.
Europa Occidental										
Alemania	2.985	3.648	3.881	7.705	11.934	15.371	16.306	18.652	18.776	1,8
Austria	2.882	3.465	3.706	6.519	9.747	13.759	16.905	20.656	21.079	2,0
Finlandia	1.668	2.111	4.253	6.230	9.577	12.949	16.866	19.591	20.583	2,5
Francia	2.876	3.485	5.271	7.546	11.664	15.106	18.093	20.798	21.371	2,0
Noruega	1.937	2.501	5.463	7.208	10.033	15.129	18.466	25.133	25.832	2,5
Suecia	2.561	3.096	6.739	8.688	12.716	14.937	17.695	20.759	21.589	2,1
Suiza	3.833	4.266	9.064	12.457	16.904	18.779	21.482	22.381	22.174	1,7
Reino Unido	4.492	4.921	6.939	8.645	10.767	12.931	16.430	20.159	21.245	1,5
Promedio	*2.904*	*3.436*	*5.665*	*8.125*	*11.668*	*14.870*	*17.780*	*21.016*	*21.581*	*2,0*
Otros Industriales										
Australia	4.013	5.157	7.412	8.791	12.024	14.412	17.106	21.549	23.287	1,7
Canadá	2.911	4.447	7.291	8.753	12.050	16.176	18.872	22.366	23.322	2,0
EE.UU.	4.091	5.301	9.561	11.328	15.030	18.577	23.201	28.403	29.208	1,9
Nueva Zelanda	4.298	5.152	8.456	9.465	11.189	12.347	13.909	16.178	17.564	1,4
Promedio	*3.828*	*5.014*	*8.180*	*9.584*	*12.573*	*15.378*	*18.272*	*22.124*	*23.345*	*1,8*
Europa del Sur										
Italia	1.785	2.564	3.502	5.916	9.719	13.149	16.313	18.786	19.150	2,3
España	1.786	1.989	2.189	3.072	6.319	9.203	12.055	15.457	16.633	2,2
Grecia	1.351	-	1.915	3.146	6.211	8.971	9.988	12.07	13.577	2,3
Portugal	1.302	1.257	2.086	2.956	5.473	8.044	10.826	13.953	13.900	2,3
Promedio	*1.556*	*1.936*	*2.423*	*3.772*	*6.930*	*9.842*	*12.295*	*15.066*	*15.815*	*2,3*
Europa del Este										
Albania	685	811	1.001	1.451	2.004	2.347	2.494	2.802	3.243	1,5
Bulgaria	1.223	1.534	1.651	2.912	4.773	6.044	5.597	5.341	6.268	1,6
Checoslovaquia	1.729	2.096	3.501	5.108	6.466	7.982	8.513	8.852	9.726	1,7
Hungría	1.682	2.098	2.480	3.649	5.028	6.306	6.459	7.137	7.947	1,5
Polonia	1.536	1.739	2.447	3.215	4.428	5.740	5.113	7.210	7.675	1,6
Rumania	1.415	1.741	1.182	1.844	2.853	4.135	3.511	3.006	3.511	0,9
Yugoslavia	902	1.057	1.551	2.437	3.755	6.063	5.779	4.813	5.274	1,7
Promedio	*1.310*	*1.582*	*1.973*	*2.945*	*4.187*	*5.517*	*5.352*	*5.594*	*6.235*	*1,5*
América Latina										
Argentina	2.756	3.797	4.987	5.559	7.302	8.206	6.436	8.475	7.600	1,0
Brasil	678	811	1.672	2.335	3.057	5.198	4.923	5.474	5.460	2,0
Chile	1.949	2.653	3.821	4.320	5.293	5.738	6.402	9.890	10.438	1,6
Colombia	973	1.236	2.153	2.497	3.094	4.265	4.840	5.179	5.312	1,7
México	1.366	1.732	2.365	3.155	4.320	6.289	6.119	7.270	7.151	1,6
Perú	817	1.037	2.263	3.023	3.807	4.205	2.955	3.581	3.734	1,5
Uruguay	2.219	3.31	4.659	4.96	5.184	6.577	6.474	7.859	7.557	1,2
Venezuela	821	1.104	7.462	9.646	10.672	10.139	8.313	8.571	6.962	2,1
Promedio	*1.447*	*1.960*	*3.673*	*4.437*	*5.341*	*6.327*	*5.808*	*7.037*	*6.777*	*1,6*
Asia										
China	545	552	439	673	783	1.067	1.858	3.542	4.429	2,1
India	599	673	619	753	868	938	1.309	1.861	2.165	1,3
Indonesia	743	904	840	1.019	1.194	1.870	2.516	3.28 0	3.495	1,5
Japón	1.180	1.387	1.921	3.986	9.714	13.428	18.789	21.167	21.373	2,9
Filipinas		1.053	1.070	1.476	1.764	2.376	2.224	2.421	2.564	1,0
Corea del Sur		820	770	1.105	2.340	4.114	8.704	14.001	15.750	3,3
Tailandia		841	817	1.078	1.694	2.554	4.629	6.377	7.165	2,4
Taiwán		747	924	1.492	2.980	5.869	9.886	16.859	17.284	3,5
Promedio	*767*	*872*	*925*	*1.448*	*2.667*	*4.027*	*6.239*	*8.688*	*9.278*	*2,2*
Medio Oriente										
Siria		1.350	2.409	3.023	3.540	6.508	5.701	7.698	7.931	2,0
Turquía		1.213	1.623	2.247	3.078	4.015	5.445	6.610	6.731	1,9
Africa										
Egipto		902	910	991	1.254	2.069	2.522	2.969	3.085	1,4
Ghana		781	1.122	1.378	1.424	1.157	1.063	1.299	1.393	0,6
Marruecos		710	1.455	1.329	1.616	2.272	2.596	2.654	2.913	1,6
Nigeria			753	854	1.190	1.402	1.161	1.076	1.161	0.8
África Sur		1.602	2.535	3.041	4.045	4.390	3.966	4.171	4.519	1,1
Sudán			821	1.024	888	931	743	929	1.019	0,4
Promedio		*998*	*1.266*	*1.436*	*1.736*	*2.037*	*2.009*	*2.183*	*2.348*	*1,0*

Fuente: GGDC, Total Economy Database, August 2005 desde 1950 y Maddison (2001) antes de 1950.

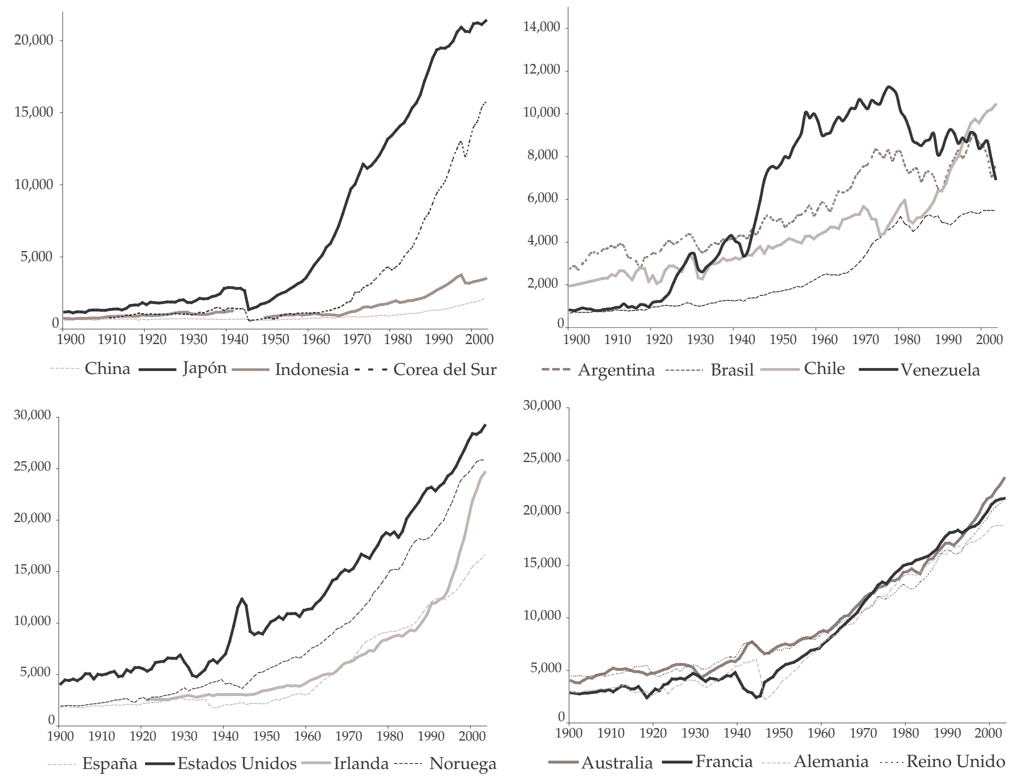


Figura 10.1: Evolución del PIB per cápita siglo XX.

10.2.4. La posguerra y convergencia

En los cuadros 10.5 a 10.7[12] se presentan más detalles sobre el crecimiento después de la Segunda Guerra Mundial.

La experiencia internacional muestra que, si bien en períodos muy prolongados —un siglo— no hay crecimientos muy por encima de 3 %, esto sí ocurre en períodos de varias décadas. Este ha sido el caso de muchos países desde 1950 hasta la primera crisis del petróleo, en 1974. Entre los países de la OECD[13], entre 1950 y 1990 Japón, Portugal, España y Grecia tuvieron un crecimiento rápido, en particular entre 1950 y 1960. Alemania también tiene un crecimiento acelerado, en particular después de la guerra y hasta 1960.

[12] Estas cifras corresponden a datos medidos a PPP en dólares de 1996. Su origen son las Penn World Tables, versión 6.1. Por esta razón no coinciden con las cifras de Maddison, aunque el panorama que presentan es muy similar. Las Penn World Tables contiene 168 países y datos desde 1950 o 1960 hasta 2000, aproximadamente. Están disponibles en http://pwt.econ.upenn.edu/.

[13] Es la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, que agrupa principalmente a países industrializados. Se usa OECD, que es la sigla en inglés.

Cuadro 10.5: Evidencia OECD

	PIB per cápita			Crecimiento medio anual					
	1950	1970	2000	50s	60s	70s	80s	90s	1950-2000
Alemania *	n.d.	12.428	22.856	n.d.	n.d.	2.5	2.1	1.6	2.1
Austria	4.214	11.176	23.676	5,7	4,3	3,5	2,3	1,8	3,5
Bélgica	6.100	12.143	23.781	2,5	4,6	3,0	2,0	1,8	2,8
Canadá	9.093	14.102	26.904	1,3	3,1	3,0	1,6	1,9	2,2
Dinamarca	8.424	16.038	26.608	2,7	3,9	1,3	1,8	2,0	2,3
España	2.830	9.076	18.047	5,1	6,9	2,4	2,3	2,2	3,8
Grecia **	2.853	8.441	14.614	4,3	7,3	3,5	0,1	2,0	3,4
Holanda	6.949	13.320	24.313	2,9	3,7	2,0	1,8	2,2	2,5
Inglaterra	7.525	12.085	22.190	2,5	2,2	1,7	2,5	1,9	2,2
Irlanda	4.266	7.260	26.381	1,9	3,5	3,2	3,6	6,4	3,7
Islandia	6.205	10.925	24.777	2,9	2,9	5,2	1,5	1,6	2,8
Italia	4.043	11.294	21.780	5,5	5,1	3,0	2,4	1,2	3,4
Japón	2.227	11.474	24.675	7,4	9,7	3,1	3,6	1,1	4,9
Luxemburgo	10.215	15.121	43.989	1,4	2,6	1,7	4,2	5,0	3,0
Noruega	6.633	11.188	27.060	2,2	3,1	4,2	2,0	2,8	2,9
Portugal	2.216	6.296	15.923	4,5	6,3	3,7	3,1	2,6	4,0
Suecia **	7.799	14.828	23.635	3,0	3,8	1,5	1,9	1,3	2,3
Suiza	10.451	20.611	26.414	3,7	3,2	0,8	1,6	0,1	1,9
Turquía	1.808	3.619	6.832	4,0	3,0	1,7	3,0	1,8	2,7
EE.UU.	10.703	16.351	33.293	1,4	2,9	2,7	2,2	2,3	2,3
Promedio	6.029	11.860	23.942	3,4	4,3	2,7	2,3	2,2	3,0

Fuente: Penn World Table 6.1. PIB a precios internacionales en US$ de 1996.
*Datos disponibles desde 1970 hasta 2000. **Datos disponibles desde 1951 hasta 2000.

Los casos de Japón y Alemania son interesantes, por cuanto se ha argumentado —y los modelos que veremos más adelante así lo demuestran— que la destrucción del capital que tuvieron durante la Segunda Guerra Mundial explica el rápido crecimiento posterior. Esto puede ser razonable para el caso de Alemania, pero se necesita agregar algo adicional para Japón, que mantuvo su crecimiento hasta principios de la década de 1990. En 1960 tenía menos de la mitad del PIB per cápita de Alemania, y en 1992 tenía prácticamente el mismo.

En la OECD también destaca Irlanda, el caso más reciente de excelente rendimiento en materia de crecimiento entre los países desarrollados. Con una respetable tasa de crecimiento de largo plazo, en la década de 1990 que casi alcanza un 7 %[14].

En América Latina, destaca el crecimiento de Brasil hasta la década de 1970, pero desde entonces hubo una desaceleración. Se debe notar también que el crecimiento de la región fue récord entre 1960 y 1970, pues superó el 2 %. Sin embargo, el mundo creció muy rápidamente en esos años. En particular, el crecimiento de los países de la OECD fue de 4,3 % en la década de 1960

[14] La cifra de 7 % tiene la virtud de que cualquier variable creciendo a esa tasa duplicaría su valor en 10 años.

(cuadro 10.5)[15]. Por el contrario, durante los años noventa del siglo pasado, con un crecimiento más modesto, este estuvo más cerca del crecimiento de los países de la OECD. Esto revela la importancia de mirar no solo las tasas de crecimiento, sino también los resultados comparados con el resto del mundo, en especial en los países de altos ingresos, que deberían representar la frontera productiva mundial.

Toda América Latina tuvo un muy pobre desempeño en la década de 1980, y en 1990 la población en esta región tenía un ingreso per cápita 10 % menor que en 1980, como promedio. Esta es la conocida "década perdida". El crecimiento se retomó —aunque moderadamente respecto del pasado— en 1990. Argentina, Chile y Uruguay destacan como países que lograron tasas inusualmente altas de crecimiento respecto de su historia.

En el caso de Asia, el crecimiento ha sido muy acelerado desde hace por lo menos treinta años. Los cuatro "tigres": Corea, Hong Kong, Singapur y Taiwán, han tenido una expansión del PIB per cápita promedio anual por sobre el 5,5 % en cuarenta años. En Singapur, Corea y Taiwán, el ingreso se multiplicó por 10 en el lapso de cuatro décadas. De las cifras presentadas hasta

Cuadro 10.6: Evidencia América Latina

	PIB per cápita		Crecimiento medio anual					
	1950	2000	50	60	70	80	90	1950-2000
Argentina	6.430	11.006	1,4	2,3	1,4	-3,8	4,3	1,1
Bolivia	2.749	2.724	-1,5	0,6	2,0	-2,2	1,1	0,0
Brasil	1.655	7.190	3,7	4,3	5,8	-0,3	1,5	3,0
Chile*	3.367	9.926	1,5	2,2	1,2	1,3	4,9	2,2
Colombia	2.208	5.383	1,4	2,2	3,2	1,4	0,9	1,8
Ecuador*	1.637	3.468	2,3	1,4	6,3	-1,2	-0,8	1,5
México	2.990	8.762	2,9	3,3	3,3	-0,4	1,8	2,2
Perú	2.488	4.589	2,6	3,8	0,4	-3,1	2,5	1,2
Paraguay*	2.412	4.684	0,1	1,7	4,6	1,0	-0,6	1,4
Uruguay	5.278	9.622	1,1	0,4	2,7	-1,0	2,9	1,2
Venezuela	5.908	6.420	2,9	3,0	-2,7	-1,4	-0,8	0,2
Promedio	3.375	6.707	1,7	2,3	2,6	-0,9	1,6	1,4

Fuente: Penn World Table 6.1. PIB a precios internacionales en US$ de 1996.
*Datos disponibles desde 1951 hasta 2000.

ahora se ve claramente que el crecimiento es dispar, y de ahí la importancia de entenderlo y extraer conclusiones de política económica. Hay países que han crecido muy rápidamente, por ejemplo, el PIB per cápita en Asia creció durante cuatro décadas a 5,2 %, en la OECD a 3,3 % y en América Latina a 1,2 %. La experiencia es dispar también a través del tiempo. Por ejemplo, lo países de la OECD crecieron cerca de un 4 % entre 1950 y 1970, para luego descender a niveles del 2,5 %. Hay grandes diferenciales de ingreso entre los países. Un

[15]Cuando los promedios se ponderan por el tamaño del país, América Latina se comporta aún mejor entre 1960 y 1970, debido al peso relativo de Brasil. Para evitar que dominen los países más grandes, los promedios son simples, es decir, cada país se pondera igual.

Cuadro 10.7: Evidencia milagro asiático

	PIB per cápita		Crecimiento medio anual				
	1960	2000	60s	70s	80s	90s	1960-2000
China	682	3.747	1,8	2,8	5,3	7,7	4,4
Hong Kong	3.090	26.699	7,7	6,8	5,2	2,5	5,5
Indonesia	936	3.642	1,5	5,7	4,2	2,5	3,5
Corea	1.495	15.876	6,1	5,8	7,6	4,8	6,1
Malasia	2.119	9.919	3,1	5,4	3,0	4,3	3,9
Singapur *	2.161	24.939	9,3	8,1	4,6	5,7	7,0
Taiwán **	1.430	17.056	6,9	7,7	6,5	5,7	6,7
Tailandia	1.091	6.857	5,3	4,1	5,9	3,6	4,7
Promedio	1.626	13.592	5,2	5,8	5,3	4,6	5,2

Fuente: Penn World Table 6.1. PIB a precios internacionales en US$ de 1996.
*Datos disponibles hasta 1996. **Datos disponibles hasta 1998.

aspecto importante que veremos después es si los países más pobres crecen más velozmente que los más ricos, como predice el modelo neoclásico que discutiremos después. Los gráficos muestran algunos patrones interesantes. Cuando se grafica el crecimiento en el período 1960-2000 contra el nivel de ingreso inicial (ver figura 10.2[16]) para grupos grandes de países, se observa que no hay una relación clara. Sin embargo, cuando el gráfico se hace para países más similares (Europa o América Latina), se observa que los países más ricos crecen más lentamente en comparación a los países más pobres que crecen más rápidamente (figuras 10.3 y 10.4). En consecuencia, si esta tendencia se mantiene en el tiempo, habría una tendencia a la convergencia en los niveles de ingresos entre países similares. En otras palabras, en el mundo no hay convergencia, pero sí se observa alguna relación —a veces débil— cuando se consideran países con mayor grado de homogeneidad.

Otra evidencia que apuntaría contra la idea de que los niveles de ingresos de los países convergerían es la evidencia de muy largo plazo (cuadro 10.2), que precisamente muestra que los países ricos, a principios del siglo XIX, son también los que crecieron más rápidamente. Pero la evidencia del cuadro 10.4 también indica que, al interior de regiones, los países inicialmente más ricos crecerían más lentamente, y viceversa.

Por último, otro aspecto importante del crecimiento es que hay una clara relación positiva entre crecimiento e inversión (figura 10.5).

[16]En las figuras 10.2 a 10.5 los países están representados por un código de tres letras, donde los códigos son los de las Penn World Tables.

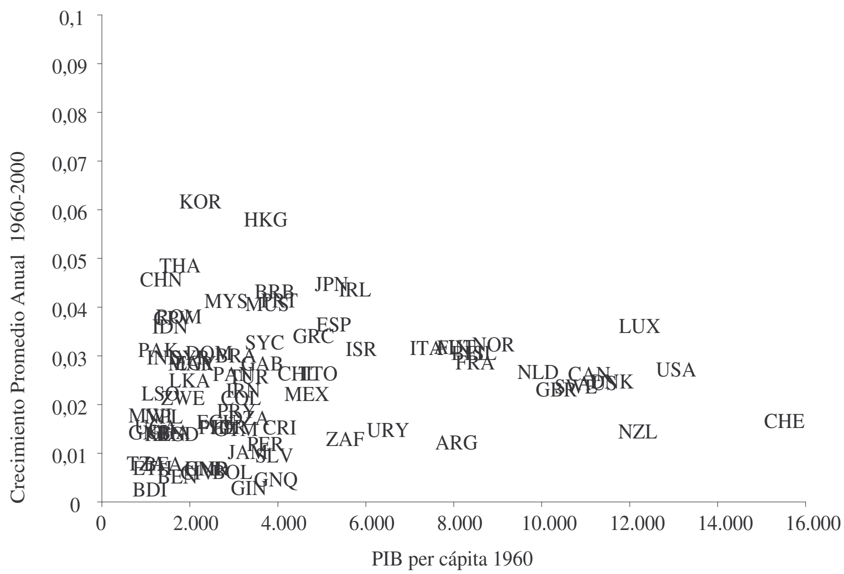


Figura 10.2: Convergencia en el mundo 1960 - 2000.

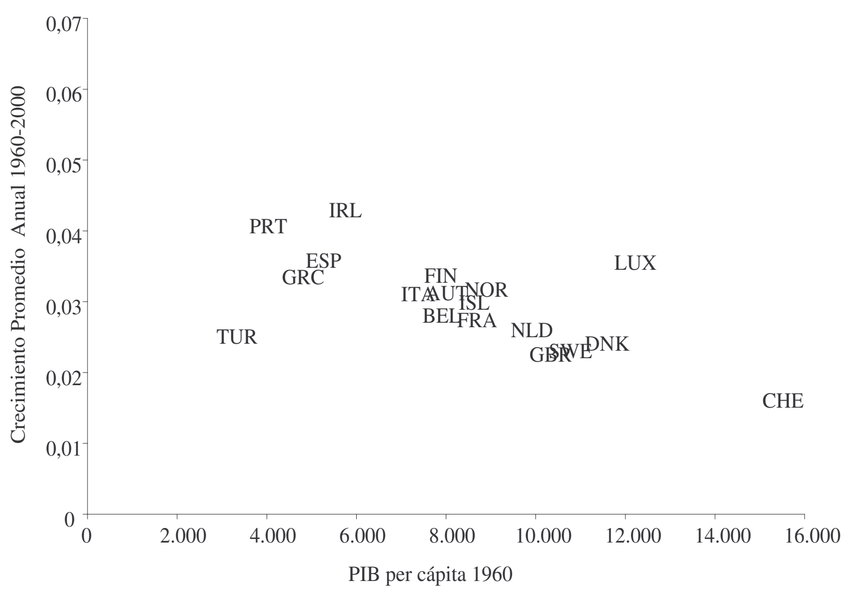


Figura 10.3: Convergencia en Europa 1960 - 2000.

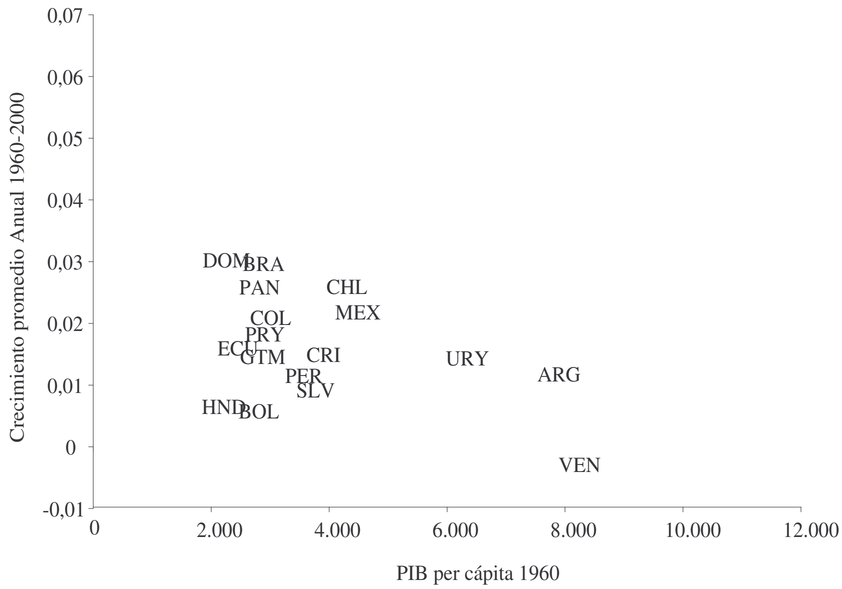


Figura 10.4: Convergencia en América Latina 1960 - 2000.

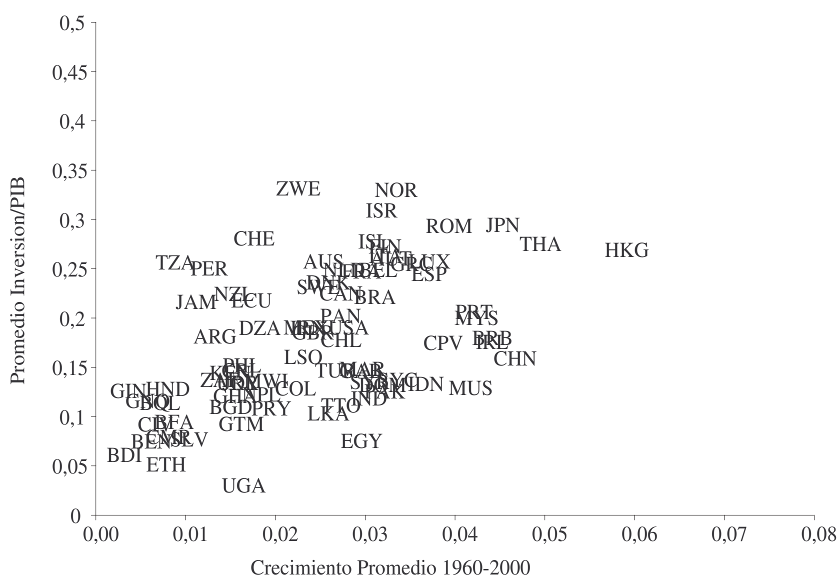


Figura 10.5: Crecimiento e inversión en el mundo, 1960-2000.

10.3. Resumen de la evidencia

Existen muchos estudios que han tratado de determinar algunos hechos estilizados del crecimiento. Una primera mirada a la evidencia de largo plazo se puede resumir como proponen S. Parente y E. Prescott, agregando alguna de la evidencia vista en este capítulo[17]:

1. Después de 1800, el ingreso per cápita de los países industriales creció rápidamente, hasta duplicarse cada cuarenta años[18].

2. Antes de 1800, el nivel de ingreso crecía muy poco o nada. El crecimiento, tal como lo conocemos hoy, empezó en el siglo XIX.

3. Entre 1800 y 1950 las diferencias de ingreso entre occidente y oriente crecieron de manera importante, y posteriormente se redujeron. En 1820, la razón entre el ingreso de occidente y de oriente era de 2,1, y aumentó sistemáticamente a 7,5 en 1950.

4. Las diferencias de ingreso en el mundo han declinado con el crecimiento moderno desde la década de 1950 hasta nuestros días. Desde 1950, la razón entre el ingreso de occidente y el de oriente ha caído hasta 4,3 en 1992. En todo caso, se observan importantes diferencias entre países, siendo América Latina y África los de menor crecimiento relativo.

5. Ha habido milagros económicos, de muy rápido crecimiento, que han ocurrido en países rezagados en materia de ingreso.

6. No hay convergencia de los niveles de ingresos en el mundo; es decir, los países pobres no crecen más que los ricos, aunque al mirar a regiones homogéneas habría algún grado de convergencia.

Asimismo, es necesario mirar otra evidencia que nos permita iluminar de mejor forma la teoría del crecimiento. Esta evidencia debería proveer antecedentes adicionales a los mencionados, que la teoría debería replicar. Un muy buen resumen de esta evidencia de la posguerra son los seis hechos estilizados que describió Kaldor en 1961, y son aspectos que los modelos de crecimiento deberían tratar de explicar o asumir cuando se especifica la tecnología u otra característica fundamental de la economía. A estos hechos estilizados se agregan dos (de los cinco) hechos incorporados a la lista por Romer (1989)[19]. El último punto, la ausencia de convergencia en el mundo, lo discutiremos con detalle en el capítulo 13.

[17] Ver Parente y Prescott (2000).

[18] Según la regla 70/x, tenemos que el crecimiento promedio fue cercano a 1,75 %, lo que es consistente con las cifras para Europa Occidental y los otros países industriales del cuadro 10.4.

[19] Ver Romer (1989) y Kaldor (1961).

1. La producción por trabajador crece continuamente en el tiempo.
2. El capital por trabajador [razón capital-trabajo] muestra un crecimiento continuo.
3. La tasa de retorno del capital es estable.
4. La razón capital-producto es estable.
5. El capital y el trabajo reciben proporciones constantes de ingreso total.
6. Hay grandes diferenciales de crecimiento por trabajador entre países.
7. El crecimiento del producto está positivamente correlacionado con el crecimiento del comercio internacional.
8. El crecimiento de la población está correlacionado negativamente con el nivel de ingreso.

Los hechos (1) y (6) son evidentes de la discusión que ya tuvimos. Por su parte, (2), (4) y (5) tienen que ver con la tecnología. Los hechos (3) y (5) están basados en la evidencia para los Estados Unidos. (5) es el más difícil de verificar, pues es complicado construir indicadores muy confiables para los retornos de los factores. Con respecto a (3), hay evidencia de que esto no ocurre en el resto del mundo, y tal como se discute más adelante, a medida que los países se desarrollan y el capital aumenta, es esperable que las tasas de retorno se reduzcan. Romer (1989) reporta dos correlaciones muy estables. La primera es que los países de mayor ingreso también tienen menor crecimiento de la población. La relación de mayor crecimiento de la población que genera menor ingreso en el largo plazo es una conclusión del modelo neoclásico que se presenta en el capítulo 11, y la relación causal inversa —es decir, mayor ingreso resulta en menor crecimiento de la población— tiene que ver con teorías sobre fertilidad que aquí no analizaremos. La segunda correlación se refiere al hecho de que el mayor ingreso en el mundo ha estado acompañado por mayor integración y comercio entre los países.

Capítulo 11

El modelo neoclásico de crecimiento

En este capítulo veremos el modelo neoclásico de crecimiento, también conocido como el modelo de Solow, trabajo que se expone en Solow (1956)[1]. Robert Solow recibió el premio Nobel de Economía "por su contribución a la teoría del crecimiento económico". Este modelo ha sido la base de la mayoría de los desarrollos posteriores así como también de una extensa literatura empírica que descompone el crecimiento en la contribución del crecimiento de los factores y de la productividad, y que se revisa en el capítulo 13. Al crecimiento de la productividad se le conoce también como el residuo de Solow.

El modelo que revisamos aquí nos permitirá discutir temas como la convergencia, así como el papel del ahorro y la productividad en el crecimiento económico.

Por último, cabe advertir un detalle técnico. Hasta ahora hemos trabajado en tiempo discreto, es decir, el tiempo se define como t, $t+1$, $t+2$... Sin embargo, en esta parte del libro usaremos tiempo continuo, es decir el tiempo t toma cualquier valor. Si bien a veces puede ser algo menos intuitivo, técnicamente hace más fácil la presentación de los temas de crecimiento examinados en este libro. Por ejemplo, es simple usar diagramas donde se presenta la dinámica y en algunos casos es más fácil resolver el modelo[2].

---

[1] También se conoce como el modelo de Solow-Swan, ya que Trevor Swan, en 1956, también publicó un trabajo donde presenta un modelo en el mismo espíritu.

[2] Un ejemplo obvio donde tiempo discreto es preferible es la integración de las restricciones presupuestarias, algo que se hace bastante en la parte II de este libro. Si se usara tiempo continuo habría que usar integrales. De hecho, esto se hace en el apéndice 14.B del capítulo 14, lo que naturalmente es más complejo que los reemplazos que se hicieron en capítulos anteriores.

11.1. El modelo básico

En una primera versión asumiremos que no hay crecimiento de la población ni crecimiento de la productividad. A continuación agregaremos el crecimiento de la población, para pasar en la sección siguiente a incluir crecimiento de la productividad. Esto nos permitirá entender la mecánica del crecimiento y el papel que juegan distintos factores en la generación del crecimiento. Para anticipar la principal conclusión: *no hay crecimiento del PIB per cápita si no hay crecimiento de la productividad*. Esto debiera quedar claro hacia el final de la siguiente sección.

Se supone que la capacidad productiva de un país se puede resumir en una función de producción:

$$Y = AF(K, L) \tag{11.1}$$

Donde Y es el PIB[3], A es un parámetro de productividad conocido como *productividad total de los factores* y K, L son la cantidad de capital y trabajadores que existen en un momento determinado en el país. Ambos factores están plenamente utilizados. Supondremos que la función de producción presenta retornos decrecientes a cada factor pero retornos constantes a escala. Esto significa que a medida que aumenta la cantidad de capital en la economía cada unidad extra de capital es menos productiva que las anteriores. Por ejemplo un kilómetro extra de camino es más productivo en un país africano, donde presumiblemente hay muy pocos caminos, que en un país como Estados Unidos.

Matemáticamente esto significa que $F_i(K, L) > 0$, pero que $F_{ii}K(K, L) < 0$, donde $i = K, L$. Esto se llama rendimientos decrecientes a cada factor. Por otra parte retornos constantes a escala significa que $F(\lambda K,\lambda L) = \lambda F(K, L)$. Una de las funciones que cumple con ambas condiciones es la función de producción Cobb-Douglas:

$$F(K, L) = K^{1-\alpha}L^{\alpha} \tag{11.2}$$

Esta función la usaremos en muchas aplicaciones, pues nos facilita la interpretación de los resultados.

Una transformación útil para proseguir con el análisis es estudiar esta economía en términos per cápita. Denotaremos por minúsculas las variables per cápita, es decir cualquier x será X/L[4]. Esto es importante, pues esta es una variable que en el largo plazo presumimos que no debería crecer, y demostraremos que así ocurre, aunque haya crecimiento de la población. Adicionalmente,

[3] Puesto que la economía es cerrada, usaremos indistintamente los términos producto e ingreso.

[4] En realidad esto es X por trabajador y no per cápita. Sin embargo, al no analizar las decisiones de oferta de trabajo ni incluir factores demográficos, esta diferencia no es importante en la discusión. Aquí se usará indistintamente per cápita y por trabajador.

como suponemos que no hay progreso técnico, normalizamos el parámetro tecnológico A a 1. Posteriormente relajaremos este supuesto. A raíz del supuesto de retornos constantes a escala podemos dividir al interior de la función (11.1) por L, lo que implicará que también tenemos que dividir por L el PIB, para llegar a:

$$y = \frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \equiv f(k)$$

A partir de esta última ecuación podemos ver que la única manera de crecer para este país es acumular más capital, y esto se logra invirtiendo. En el caso de la función Cobb-Douglas, tendremos la siguiente función para el PIB por trabajador como función del capital por trabajador:

$$y = k^{1-\alpha}$$

Además, supondremos que la economía es cerrada y que no hay gobierno. Primero analizaremos el caso de crecimiento sin progreso técnico y sin crecimiento de la población, luego asumiremos que la población crece, y en la sección siguiente estudiamos el progreso técnico.

11.1.1. Población constante

De la contabilidad sabemos que en una economía cerrada y sin gobierno el producto se gasta en consumo e inversión, lo que expresado en términos per cápita es:

$$y = c + i \tag{11.3}$$

Por otra parte, sabemos que el capital se acumula dependiendo de cuánto invierte el país menos lo que se deprecia el capital instalado, es decir:

$$k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t$$

Esta es la representación en tiempo discreto. En tiempo continuo, haciendo infinitesimalmente pequeña la unidad de tiempo, y eliminando el índice de tiempo pues todas las variables corresponden al instante t, se tiene que:

$$\dot{k} = i - \delta k \tag{11.4}$$

Donde $\dot{k}$ es, formalmente, el cambio en k ante un cambio marginal en t, es decir, $\frac{\partial k}{\partial t}$. Finalmente supondremos que los individuos ahorran una fracción s de su ingreso. Por lo tanto, consumen una fracción $(1 - s)$ de él. Este supuesto es muy importante, porque simplifica mucho la presentación. En el fondo, toda la conducta de los hogares se resume en s, sin entrar a discutir cómo la gente decide su ahorro y consumo. En capítulos anteriores argumentamos que esta decisión es mucho más compleja y depende del objetivo de maximizar utilidad de los hogares durante su ciclo de vida. La simplificación que aquí hacemos es similar a la función de consumo keynesiana, que resume toda la conducta en la propensión marginal a consumir (1 menos la propensión a ahorrar). Existen modelos más generales y rigurosos que parten de una conducta del consumidor más compleja, que es presentada en el capítulo 14, pero lo poderoso del modelo de Solow es que es una formulación muy sencilla que captura elementos muy importantes de la realidad.

A partir de las ecuaciones (11.3) y (11.4), más el último supuesto, se tiene que:

$$\dot{k} = f(k) - (1-s)f(k) - \delta k = sf(k) - \delta k \tag{11.5}$$

Gráficamente la ecuación (11.5) se puede apreciar en la figura 11.1[5].

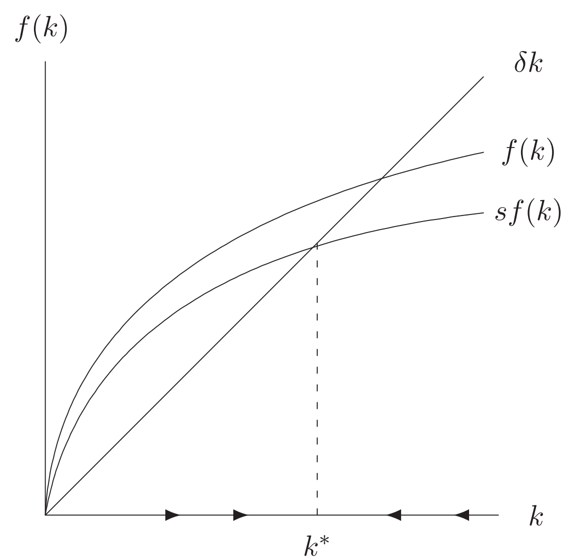


Figura 11.1: Modelo de Solow.

Como la función de producción presenta retornos decrecientes con respecto al capital, cada unidad extra de k aumenta el valor de $f(k)$ en una menor cantidad. La diferencia entre $sf(k)$ y δk es lo que se acumula el capital en términos per cápita. En k^* la inversión en nuevo capital $sf(k^*)$ es igual a la depreciación del capital δk^*, por lo tanto en este punto el capital deja de acumularse, es decir $\dot{k} = 0$. Esto se conoce como el **estado estacionario**.

[5]Así como la oferta y demanda son los gráficos más clásicos en microeconomía, a mi juicio este debe ser el gráfico más importante en macroeconomía. Al menos en todos los libros de macro aparece, lo que no es común con los otros gráficos.

A la izquierda de k^* el capital crece a través del tiempo ($\dot{k} > 0$) pues cada unidad adicional de capital, la inversión, no solo cubre la depreciación sino que además permite agregar capital al stock existente. Por otro lado, a la derecha de k^* el capital se desacumula, pues en este caso la depreciación del capital es mayor a lo que se invierte ($\dot{k} < 0$), provocando una caída en el stock.

Por lo tanto la primera conclusión que podemos obtener del modelo neoclásico es:

Conclusión 1: No hay crecimiento en el largo plazo si no hay crecimiento de la productividad ni de la población.

Para esta conclusión es clave que la productividad marginal del capital sea decreciente, así las unidades adicionales de capital son menos productivas, previniendo que la acumulación de capital continúe indefinidamente. Imponiendo el estado estacionario en la ecuación (11.5), se obtiene:

$$\frac{k^*}{y^*} = \frac{k^*}{f(k^*)} = \frac{s}{\delta}$$

Si la función de producción es Cobb-Douglas ($y = k^{1-\alpha}$), se obtiene de la última ecuación:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Esta última relación nos indica que países que ahorran más tienen mayores niveles de capital de estado estacionario. Volveremos sobre este punto más adelante.

11.1.2. Crecimiento de la población

A continuación relajaremos el supuesto de que la población no crece, y supondremos que la población crece a una tasa exógena n, es decir, $L = L_0 e^{nt}$. La ecuación (11.4) está en términos per cápita, pero ahora hay que tener cuidado y partir de la igualdad expresada en términos totales:

$$\dot{K} = I - \delta K$$

Si dividimos por L, tendremos que $\dot{K}/L = i - \delta k$, pero $\dot{K}/L$ es distinto de $(\dot{K/L})$, ya que, en este último caso, tanto el numerador como el denominador varían en el tiempo. Por lo tanto, no podemos usar la misma expresión que para el caso de $n = 0$. De hecho, tomando derivadas se tiene que:

$$(\dot{K/L}) = \dot{k} = \dot{K}/L - K\dot{L}/L^2$$

Usando el hecho de que $\dot{L}/L = n$ se llega a:

$$\dot{k} = \dot{K}/L - nk \tag{11.6}$$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación de acumulación agregada de capital (dividida por L) y usando el hecho de que $i = sf(k)$, se tiene la siguiente ecuación que describe la acumulación de capital:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k \tag{11.7}$$

Si comparamos la ecuación (11.7) con (11.5) se puede concluir que son iguales, con la única diferencia de que en la ecuación (11.7) la tasa de depreciación efectiva es $\delta + n$, que corresponde a la depreciación del capital por trabajador. El capital se deprecia a una tasa δ, pero su nivel por unidad de trabajador cae a una tasa n por el hecho de que la población crece. En consecuencia, el capital *per cápita* se deprecia a $\delta + n$. Si la depreciación δ fuera 0, el capital per cápita caería a una tasa n si no hubiera inversión. La ecuación (11.7) se presenta en la figura 11.2.

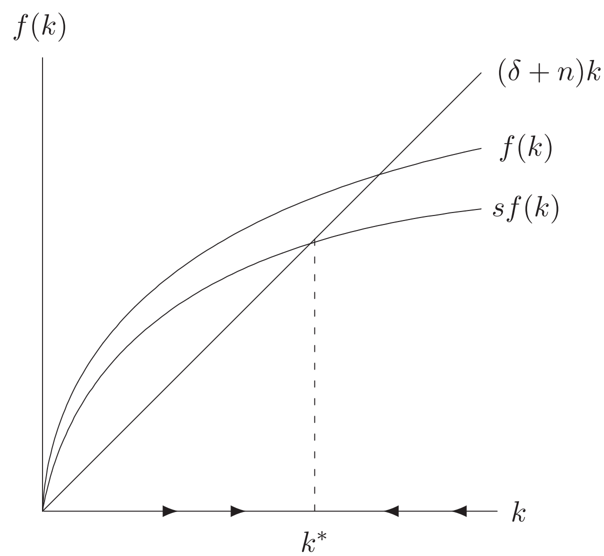


Figura 11.2: Modelo de Solow con crecimiento de la población.

Al igual que en el caso sin crecimiento de la población, si imponemos el estado estacionario en la ecuación (11.7) tendremos que:

$$k^* = \frac{sf(k^*)}{\delta + n}$$

Para resolver explícitamente para k, podemos usar la función Cobb-Douglas para llegar a:

$$k^* = \left[\frac{s}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{11.8}$$

y

$$\frac{k^*}{y^*} = \frac{s}{\delta + n} \tag{11.9}$$

Nótese que esta ecuación ya nos permite hacer algunas calibraciones. Si la tasa de ahorro es alta, de 30 %, y la tasa de depreciación es 5 % y el crecimiento de la población es 2 %, tendremos que el capital es aproximadamente cuatro veces el producto. Si, en cambio, el ahorro es 20 % del PIB, el coeficiente capital-producto sería alrededor de 3. Estas cifras, como veremos más adelante, son algo menores en la realidad; para tener una calibración más realista habría que agregar el crecimiento de la productividad.

Existe una forma alternativa de entender gráficamente la dinámica y el estado estacionario de la acumulación de capital[6]. Si dividimos la ecuación (11.7) por k se llega a:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (\delta + n) \tag{11.10}$$

Donde γ_k es la tasa de crecimiento del capital per cápita[7]. En la figura 11.3 se grafica $sf(k)/k$ y $(\delta+n)$. El estado estacionario corresponde a la intersección de ambas curvas.

Esta figura no es más que el diagrama clásico de Solow dividido por k, pero tiene la ventaja de que la distancia entre la curva $sf(k)/k$ y la horizontal $\delta+n$ nos da inmediatamente la tasa de crecimiento del capital. Además, como no hay crecimiento de la productividad, el PIB per cápita crece proporcionalmente al crecimiento del capital per cápita, ya que $y = k^{1-\alpha}$, entonces $\gamma_y = (1-\alpha)\gamma_k$. En consecuencia, la distancia γ_k es proporcional al crecimiento del PIB per cápita, γ_y.

La figura 11.3 nos confirma nuestra conclusión 1, es decir, en ausencia de crecimiento de la productividad los países no crecen en el largo plazo, solo crecen en la transición al estado estacionario. Si están a la izquierda de k^* la economía crece, en cambio si están a la derecha el crecimiento es negativo. Por otra parte, podemos confirmar lo que nos mostraba la evidencia empírica para países "similares", esta es nuestra segunda conclusión:

[6]Esta representación gráfica es ampliamente usada en Sala-i-Martin (2000), y a pesar de no ser la más tradicional, es la más informativa.

[7]En general, se usa la notación γ_z como la tasa de crecimiento de z.

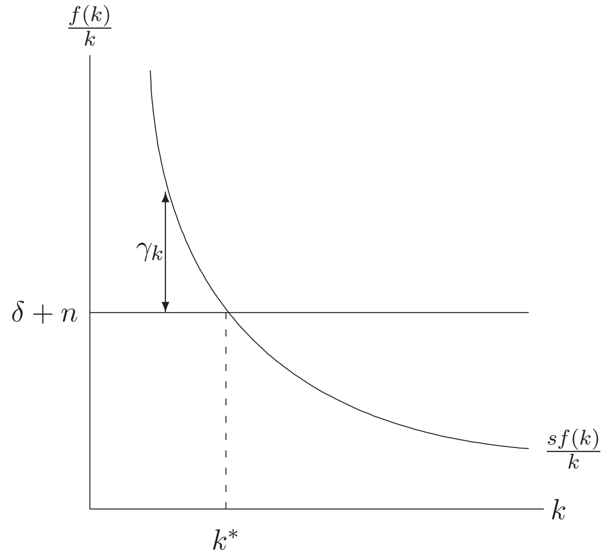


Figura 11.3: Tasa de crecimiento del capital.

Conclusión 2: Los países más pobres respecto de su estado estacionario crecen más rápido que aquellos que tienen un ingreso más cerca de su estado estacionario.

En la figura esto significa que los países que están más a la izquierda de k^* crecen más rápidamente ($sf(k)/k - (\delta + n)$ es mayor). Esto se conoce como **convergencia**. Entendemos por países más pobres a países que tienen un menor nivel de capital. Este resultado proviene del hecho de que una unidad extra de capital es más productiva en países como Nepal que en países como Japón, por lo tanto con la misma tasa de inversión y depreciación Nepal va a crecer más rápido que Japón simplemente porque el capital es más productivo en Nepal.

Se debe notar que este concepto de convergencia presume que los países tienen el mismo estado estacionario, y por lo tanto convergen al mismo nivel de ingreso per cápita. Esta se conoce como **convergencia no condicional,** ya que los países más ricos (pobres) crecerían más lentamente (rápidamente).

Sin embargo, uno se puede preguntar qué pasa con países que tienen distintos niveles de ingreso de largo plazo, como los ilustrados en la figura 11.4. El país que tiene equilibrio k_1^*, el pobre, está más cerca de su equilibrio si parte de k_1, que el país más rico, que partiendo de k_2 debe converger a k_2^*. En este caso puede ser que el país más pobre crezca más lento porque está más cerca de su nivel de ingreso de largo plazo. En este caso hay convergencia, pero **convergencia condicional** al estado estacionario, esto es, países más ricos (pobres) *respecto* de su estado estacionario crecen más lentamente (rápidamente). A

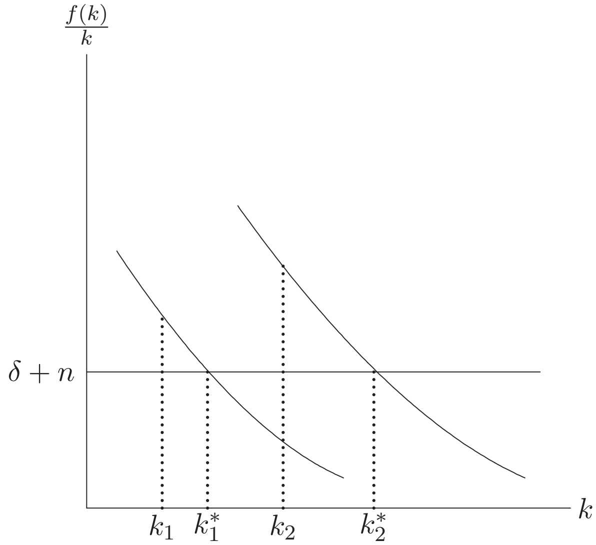


Figura 11.4: Convergencia condicional.

partir de la figura 11.3 uno podría intentar entender qué factores influyen en que difiera el nivel de k^* entre los países. La respuesta a esta interrogante proviene de la misma figura 11.3:

- Países que ahorran más tienen mayor nivel de capital de estado estacionario.

- Países que tienen mayores tasas de crecimiento de la población tienen menor nivel de capital de estado estacionario[8].

Anteriormente, nosotros normalizamos el parámetro de productividad A a 1. No obstante si aceptamos que es constante, pero diferente, entre países, podríamos concluir también que países con mayor A tendrán mayores niveles de ingreso en estado estacionario.

Recordemos que en el caso en que hay crecimiento de la población y la función de producción es Cobb-Douglas se tiene que el nivel de capital per cápita viene dado por la ecuación (11.8), de donde se observa además que el capital (e ingreso) de largo plazo será menor para países con un capital que se deprecia más rápido. Sin embargo, no hay razones ni evidencia poderosa para argumentar que el crecimiento difiere porque las tasas de depreciación son diferentes. Un aumento de la tasa de crecimiento de la población o de la

[8]Sin embargo, existe también una relación en el sentido inverso en que países con mayor nivel de capital per cápita tienen menores tasas de crecimiento de la población, pues su costo de oportunidad de tener hijos es mayor.

depreciación frena el crecimiento, porque el esfuerzo de inversión para mantener el capital per cápita constante deberá ser mayor y, por lo tanto, el capital de equilibrio deberá ser menor (la productividad es decreciente).

Si quisiéramos examinar la existencia de convergencia condicional deberíamos no solo comparar el crecimiento con el nivel de ingreso, sino además por su ingreso de estado estacionario, o los factores que determinan dicho ingreso. Podríamos ver, por ejemplo, que una economía de alto ingreso crece mucho más rápido que una de bajo ingreso, pero esto se podría explicar en el contexto del modelo de Solow, por ejemplo, porque la economía más rica tiene una tasa de ahorro muy alta.

11.2. La regla dorada

Que una economía tenga en estado estacionario un nivel de ingreso mayor no significa necesariamente que su nivel de bienestar sea mayor. Podríamos pensar que una economía que crece siempre más rápido que otra, tarde o temprano terminará teniendo mayores niveles de ingreso o consumo. No obstante, en el estado estacionario, donde no se crece más, no es claro que tener un nivel de ingreso mayor es mejor, porque esto se puede deber a que se sacrifica mucho consumo, y sabemos que una mejor aproximación al bienestar no es el nivel de ingreso, sino el de consumo. A partir de esto nos interesaría determinar cuánto es el k de estado estacionario óptimo, de tal manera que el individuo maximice su consumo. Para ese k óptimo podemos entonces determinar cuál es la tasa de ahorro óptima que sustenta dicho equilibrio de largo plazo. Este es un análisis en estado estacionario. Es decir, queremos encontrar k^{RD} de tal manera de que[9]:

$$\max_{\{k^*\}} c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

Derivando e igualando a 0 tenemos que la solución a este problema es

$$f'(k^{RD}) = \delta + n \tag{11.11}$$

Donde k^{RD} se conoce como el capital de la **regla dorada**.

Podemos avanzar con el álgebra suponiendo que la función de producción es Cobb-Douglas, en cuyo caso al aplicar (11.11) tenemos que la solución óptima viene dada por:

$$k^{RD} = \left[\frac{1-\alpha}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

[9]Esta relación viene de aplicar el estado estacionario en la ecuación $\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k$.

Por otra parte, la ecuación (11.8) nos muestra que el capital de estado estacionario es:

$$k^* = \left[\frac{s}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

A partir de estos dos niveles de capital podemos llegar a concluir lo siguiente respecto de si el ahorro es insuficiente o excesivo para maximizar el consumo de estado estacionario:

- Si $s = 1 - \alpha$ entonces la economía se encuentra en su nivel de regla dorada. Es decir $s = s^{RD}$.
- Si $s > 1 - \alpha$ el nivel de capital de estado estacionario es demasiado alto, y por lo tanto su tasa de ahorro es demasiado alta.
- Si $s < 1 - \alpha$ el nivel de capital es menor que el que maximiza el consumo en estado estacionario. Es decir su tasa de ahorro es muy baja.

Este análisis se puede apreciar gráficamente en la figura 11.5. Esta misma figura nos muestra que la tasa de ahorro que maximiza el consumo en el estado estacionario es s^{RD}.

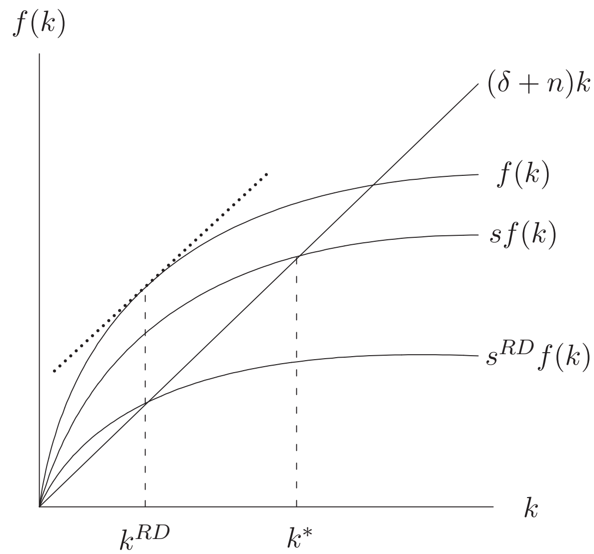


Figura 11.5: Regla dorada.

En la figura 11.5, el capital de estado estacionario k^* es mayor que el de la regla dorada. En otras palabras, esta economía ahorra mucho (a una tasa s). El consumo está dado por la distancia vertical entre $f(k)$ y $(\delta+n)k$ al nivel de k^*. Lo que la figura muestra es que en k^{RD} dicha distancia es mayor, es decir, se puede sostener un nivel de consumo mayor en equilibrio con una tasa de ahorro menor. Más aún, imaginemos que partimos de k^*; se podría hacer una gran fiesta, consumir $k^* - k^{RD}$, quedarnos con una tasa de ahorro menor, y ser más felices en el nuevo estado estacionario. Por ello, en teoría del crecimiento, cuando el capital es mayor que el de la regla dorada, se habla de un equilibrio *dinámicamente ineficiente*. Hay una estrategia en la cual sin esfuerzo todos mejoran.

¿Cómo pueden las economías ahorrar excesivamente? La razón nuevamente es la productividad marginal decreciente. Ahorrar mucho nos puede conducir a un nivel de capital muy elevado, en el cual la productividad es muy baja. Esto significa que $f(k)/k$ es muy bajo, y solo logra igualar la depreciación efectiva con una tasa de ahorro muy alta. Sería posible alcanzar con una menor tasa de ahorro un capital más productivo, lo que conduciría a un mayor nivel de consumo, para que en equilibrio lo que se invierta alcance también a reponer lo que se deprecia.

Aunque aquí no profundizaremos en este tema, una pregunta importante es cómo una economía descentralizada y de mercado puede ser ineficiente, si como nos dice la teoría microeconómica de equilibrio general, el equilibrio debería ser Pareto óptimo. La literatura en esta área es abundante, pero como anticipo se puede señalar que el equilibrio puede ser ineficiente cuando los mercados no son completos. Por ejemplo, en un mundo donde la gente no vive para siempre, podría no existir un mecanismo que asegure que las decisiones de las personas sean consistentes con un equilibrio dinámico eficiente de largo plazo. El problema del modelo neoclásico para analizar con mayor profundidad este tema es que asume que la tasa de ahorro es constante y exógena al modelo. En el capítulo 14 se analiza en detalle un modelo con la tasa de ahorro endógena.

Lo que sí nos permite entender este ejemplo es que existe la posibilidad que los países ahorren mucho. Esto además nos alerta que pretender forzar el ahorro excesivamente puede ser perjudicial. En países desarrollados con elevadas tasas de ahorro, como el caso clásico de Japón, la pregunta acerca de si el ahorro es excesivo puede ser relevante. Sin embargo, para países en desarrollo esta pregunta no es tan relevante, pues si hay algo claro es que tienen poco capital, por lo tanto difícilmente estarán con exceso de capital. Además, como veremos más adelante, es posible que mayores tasas de ahorro generen de manera permanente mayores tasas de crecimiento de la economía, en cuyo caso sería más difícil pensar que puede haber ahorro excesivo.

11.3. Progreso técnico

Una de las principales conclusiones de la sección anterior fue que en el largo plazo la economía no crece. Este resultado es bastante distinto de la evidencia internacional, donde observamos que los países crecen siempre más allá del crecimiento de su población. Para hacer compatible esto con el modelo neoclásico es necesario incorporar crecimiento tecnológico.

Para incorporar al modelo neoclásico el avance tecnólogico suponemos que la función de producción es:

$$Y = AF(K, L) \tag{11.12}$$

Donde A es la productividad total de los factores, la cual crece a una tasa exógena x, es decir $A_t = A_o e^{xt}$. El suponer que la productividad total de los factores crece exógenamente implica que solo analizaremos cuáles son las consecuencias que este avance tecnológico tiene sobre el crecimiento económico; no intentaremos analizar por qué en algunos países el progreso técnico es mayor que en otros. Seguiremos suponiendo que la población crece a una tasa n. Si la función de producción es Cobb-Douglas, entonces la ecuación (11.12) se puede escribir como:

$$Y = A_0 K^{1-\alpha} \left[L_0 e^{(n+x/\alpha)t}\right]^{\alpha} = A_0 K^{1-\alpha} E^{\alpha} \tag{11.13}$$

Donde $E = L_0 e^{(n+x/\alpha)t}$. El término E se conoce como las **unidades de eficiencia de trabajo.** Esto corresponde a las horas de trabajo disponible (o número de personas) corregidos por la calidad de esta fuerza de trabajo. Esto se puede deber, por ejemplo, a los mayores niveles de educación, así como a los nuevos conocimientos, incorporados en la fuerza de trabajo. Se puede notar que la ecuación (11.13) es básicamente la misma que la ecuación del modelo de Solow con crecimiento de la población. En este caso A es constante, hay dos factores de producción y retornos constantes a escala. El factor K se acumula con inversión y E crece exógenamente a una tasa $n + x/\alpha$. En consecuencia parecería natural trabajar con variables medidas en términos de unidad de eficiencia, en vez de medidas en términos per cápita como lo hicimos antes, y el modelo es análogo.

Para esto normalizamos $A_0 = 1$ y definimos cualquier variable $\tilde{z}$ como $\tilde{z} = Z/(L_0 e^{(n+x/\alpha)t})$, es decir, $\tilde{z}$ corresponde a Z por unidad de eficiencia. La relación entre la variable medida por unidad de eficiencia y per cápita es simplemente $\tilde{z} = z/e^{(x/\alpha)t}$.

A partir de la ecuación de producto-gasto tenemos que:

$$Y = C + I = C + \dot{K} + \delta K \tag{11.14}$$

y transformando esta ecuación a unidades de eficiencia llegamos a[10]:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{k}} &= f(\tilde{k}) - \tilde{c} - (\delta + n + \frac{x}{\alpha})\tilde{k} \\ &= sf(\tilde{k}) - (\delta + n + \frac{x}{\alpha})\tilde{k} \end{aligned} \tag{11.15}$$

Gráficamente el equilibrio se presenta en la figura 11.6.

[10]Esto se deriva igual que la expresión 11.6, es decir se deriva K/E respecto del tiempo, reconociendo que E crece a $n + x/\alpha$, en lugar de n como en dicha ecuación.

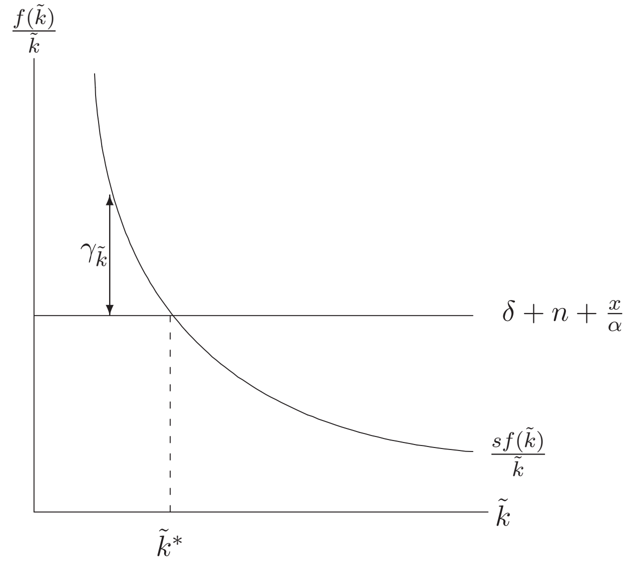


Figura 11.6: Progreso técnico.

A partir de la figura 11.6 podemos ver que en estado estacionario el producto (Y), consumo (C) y capital (K), crecen a una tasa $n+x/\alpha$, mientras que los valores per cápita crecen a una tasa x/α. Por lo tanto podemos concluir que:

Conclusión 3: En el largo plazo el progreso técnico hace crecer el producto per cápita de los países. El crecimiento del producto total es la suma del crecimiento de la población más el crecimiento de la productividad del trabajo.

Dado que las variables medidas en términos de unidades de eficiencia no crecen en estado estacionario, las variables agregadas deberán crecer a la misma tasa que la eficiencia (crecimiento del numerador igual al del denominador), con lo que tenemos que:

$$\gamma = \gamma_Y = \gamma_K = \gamma_C = n + \frac{x}{\alpha}$$

Para llegar a las variables per cápita, basta con restar n para tener:

$$\gamma_y = \gamma_k = \gamma_c = \frac{x}{\alpha}$$

De la ecuación (11.15), podemos encontrar el valor del cuociente capital producto en estado estacionario como:

$$\frac{\tilde{k}}{\tilde{y}} = \frac{K}{Y} = \frac{s}{\delta + \gamma} = \frac{s}{\delta + n + \frac{x}{\alpha}} \tag{11.16}$$

Ahora podemos calibrar esta ecuación, y si usamos una tasa de ahorro de 20 % a 30 %, tasas de crecimiento de 4 a 5 por ciento y depreciación de 5 %, llegamos a que el capital es entre dos y tres veces el nivel de producto. Esto es más o menos lo que indica la evidencia empírica.

Al igual que en el caso de crecimiento sin progreso técnico podemos calcular el nivel del capital que maximiza el consumo en estado estacionario, el cual es:

$$f'(\tilde{k}^{RD}) = \delta + n + \frac{x}{\alpha}$$

Esta ecuación tiene otra implicancia interesante, y es que *la tasa de interés real de la regla dorada, que en el capítulo 4 vimos que era $f'(k) - \delta$, es igual a la tasa de crecimiento de la economía*, es decir si la economía está en la regla dorada, r tiene que igualar a γ. Si la tasa es menor, quiere decir que la productividad del capital es baja, en consecuencia hay mucho capital. De manera que, para que no haya mucho capital, la tasa de interés debería ser al menos igual a la tasa de crecimiento. Este es un resultado interesante y también podríamos usarlo para pensar en la realidad. Una tasa de interés real de largo plazo para los países de la OECD, de acuerdo con la evidencia del cuadro 10.5, sería en torno a 3 %. Si hay países que lograran crecer al nivel de los países milagrosos estaríamos hablando de tasas reales de largo plazo en torno a 5 %. Por supuesto hay que ser cuidadoso al usar este resultado, por cuanto se refiere al largo plazo. Usar esto para guiar la política monetaria de corto plazo es un buen ejemplo de mal uso de la teoría económica, aunque sí da buenas pistas sobre los niveles que debería tener la tasa de interés real de largo plazo y hacia qué nivel deberían estabilizarse.

Por último, se debe recordar que, para que las restricciones presupuestarias estén acotadas, es necesario que el crecimiento del ingreso sea menor a la tasa de interés, de otro modo uno se podría endeudar infinitamente y siempre ser solvente[11]. Por lo tanto la eficiencia dinámica también es consistente con otras restricciones impuestas a la tasa de interés para tener modelos macroeconómicos realistas y bien especificados. Hubiera sido una complicación que la condición de eficiencia encontrada aquí fuera la opuesta a la derivada de las restricciones presupuestarias.

11.4. Aplicaciones

A continuación realizaremos algunos ejercicios de estática comparativa. Analizaremos cuatro casos: reducción del stock de capital, aumento de la tasa de crecimiento de la población, aumento de la tasa de ahorro, y aumento de la tasa de crecimiento del progreso técnico.

[11] Esto fue discutido en el contexto de la restricción presupuestaria del gobierno en el capítulo 5 y de la condición de solvencia externa en el capítulo 9.

(a) Reducción del stock de capital

Considere una economía que está creciendo, ya sea en la transición hacia su estado estacionario, o simplemente está en él. Como producto de un terremoto, una guerra o algún otro desastre su stock de capital se reduce exógenamente. En términos de la figura 11.3 lo que ocurre es que el capital inicial se desplaza a la izquierda, cualquiera sea su nivel inicial.

La reducción en el capital aumenta su productividad marginal, en consecuencia una misma tasa de inversión generará mayor crecimiento. Así aumentan las tasas de crecimiento del capital y PIB. Obviamente este es un caso simple en el cual el aumento de la tasa de crecimiento es consecuencia de un desastre y ciertamente el bienestar es menor ya que la economía solo crece más rápido para recuperar lo recién perdido, como resultado de la mayor productividad del capital.

Esta es la explicación que se ha usado para el rápido crecimiento de Alemania y Japón después de la Segunda Guerra Mundial. Es una buena explicación para los años inmediatos, pero no es suficiente cuando la economía ya ha recuperado sus niveles de capital previos a la guerra, que en ambos países ocurre a mediados de la década de 1950. En años posteriores, particularmente en Japón, el crecimiento se mantuvo muy alto, reduciendo así la brecha de productividad que tenía con Estados Unidos desde antes de la guerra, y le permitió llegar a ser de las economías más ricas del mundo. Obviamente, la historia de destrucción de parte del stock de capital, y de la mano de obra también, no es suficiente para explicar esta experiencia de crecimiento.

(b) Mayor crecimiento de la población

Supondremos que la tasa de crecimiento de la población aumenta de n_1 a n_2. Esto significa que para mantener el mismo nivel de capital per cápita la economía tiene que invertir más, pues este se deprecia más rápidamente en términos por unidad de trabajador. Para mantener un nivel dado de capital per cápita ahora es necesario acumular más capital, lo que se logra con un capital marginalmente más productivo, o sea el stock de capital sería menor. Por lo tanto el nivel per cápita en estado estacionario cae de $\tilde{k}_1^*$ a $\tilde{k}_2^*$ (ver figura 11.7)[12]. Sin embargo en el largo plazo el producto, consumo y capital siguen creciendo a la misma tasa de antes del aumento de la tasa de crecimiento de la población, es decir, a x/α.

Dada la tasa de ahorro de esta economía, y obviando el caso en el cual la economía puede haber partido con mucho capital (mayor al de la regla dorada), la caída del stock de capital producirá una caída en el producto y en el consumo de largo plazo, y en la transición hacia el nuevo estado estacionario

[12] En este caso suponemos que el aumento de la población no tiene ningún efecto sobre el progreso técnico.

la economía experimentará una reducción en su tasa de crecimiento per cápita.

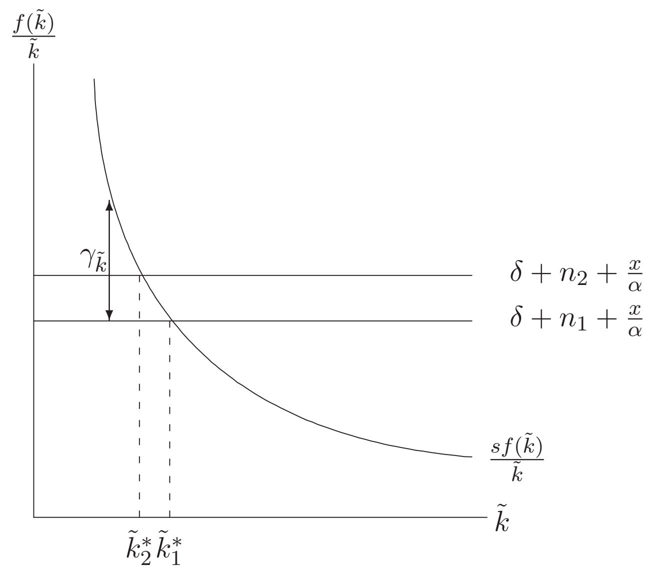


Figura 11.7: Aumento de la tasa de crecimiento de la población.

(c) Aumento de la tasa de ahorro

Consideremos una economía que se encuentra en estado estacionario, como se puede apreciar en la figura 11.8, con una tasa de ahorro s_1. Suponga que esta tasa aumenta exógenamente a s_2. Cuando la tasa de ahorro aumenta se llega a un estado estacionario con mayor capital, de $\tilde{k}_1^*$ a $\tilde{k}_2^*$, y consecuentemente con un producto per cápita mayor. También se producirá un aumento en la tasa de crecimiento durante la transición a este nuevo estado estacionario. Como la economía ahorra más, en el estado estacionario original, la inversión supera la depreciación permitiendo que el capital crezca. Esto significa que durante la transición esta economía invierte el mayor capital ahorrado, trayendo como consecuencia que el capital de estado estacionario aumente.

Sin embargo, a medida que el capital se va acumulando cae su retorno y en el largo plazo la economía sigue creciendo a la misma tasa de antes, es decir x/α. El mayor crecimiento ocurre en la transición, la cual puede ser muy larga.

Por último, de acuerdo con nuestra discusión sobre la regla dorada, se puede concluir que no es claro lo que pasará con el consumo per cápita de largo plazo, y depende de la posición respecto de la regla dorada. En todo caso, es necesario repetir que en países en vías de desarrollo claramente un aumento del ingreso de largo plazo es beneficioso, porque difícilmente tienen exceso de capital al inicio. No obstante, hay un *tradeoff* en la transición. En

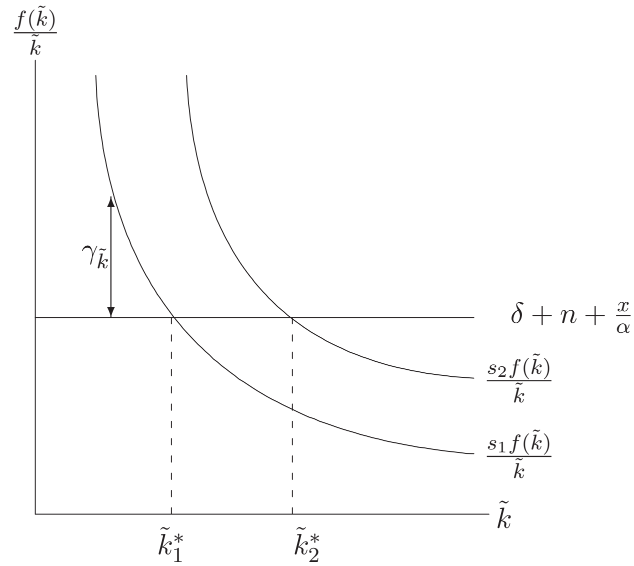


Figura 11.8: Efectos de aumento de la tasa de ahorro.

el instante que esta economía pasa de s_1 a s_2, el stock de capital y el producto son los mismos, por lo tanto el consumo al principio cae, lo cual no aumenta el bienestar. Esto es obvio si se piensa que dado el ingreso, un aumento del ahorro necesariamente requiere reducir los gastos. Si como producto de esto el ingreso es más elevado, en el futuro se puede tener que aumente el ahorro, el consumo y el bienestar. Para que el ahorro conduzca a un aumento del bienestar, casi sin excepciones, es preciso que el ahorro lleve a más crecimiento en el largo plazo, lo que requiere salir del modelo neoclásico a modelos de crecimiento endógeno que se revisan en el siguiente capítulo.

(d) Aumento progreso técnico

En este caso analizamos los efectos de un aumento de la tasa de crecimiento de la productividad de x_1 a x_2, algo más complicado que lo analizado hasta ahora. Las consecuencias en el gráfico son similares al caso analizado en la parte (b), es decir, el capital y el ingreso por unidad de eficiencia cae de $\tilde{k}_1^*$ a $\tilde{k}_2^*$. Dada la tasa de ahorro se puede verificar que $\tilde{c}$ también cae. Esto puede sonar paradójico: la economía tiene un crecimiento de la productividad más acelerado y $\tilde{c}$ cae, con lo cual alguien podría pensar que el bienestar cae. Sin embargo, esto no es así, ya que lo que nos interesa desde el punto de vista de bienestar es el consumo per cápita (c) y no por unidad de eficiencia ($\tilde{c}$). Por eso centraremos el análisis en determinar qué sucede con el consumo y el nivel de capital per cápita.

Supondremos que en $t = 0$, la productividad aumenta de x_1 a x_2, en cuyo caso se tiene que:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = -\frac{\Delta x}{\alpha} = -\frac{(x_2 - x_1)}{\alpha}$$

Por otra parte sabemos que:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} + \frac{x_2}{\alpha}$$

Juntando estos dos términos obtenemos que:

$$\frac{\dot{k}}{k} = -\frac{(x_2 - x_1)}{\alpha} + \frac{x_2}{\alpha} = \frac{x_1}{\alpha} \tag{11.17}$$

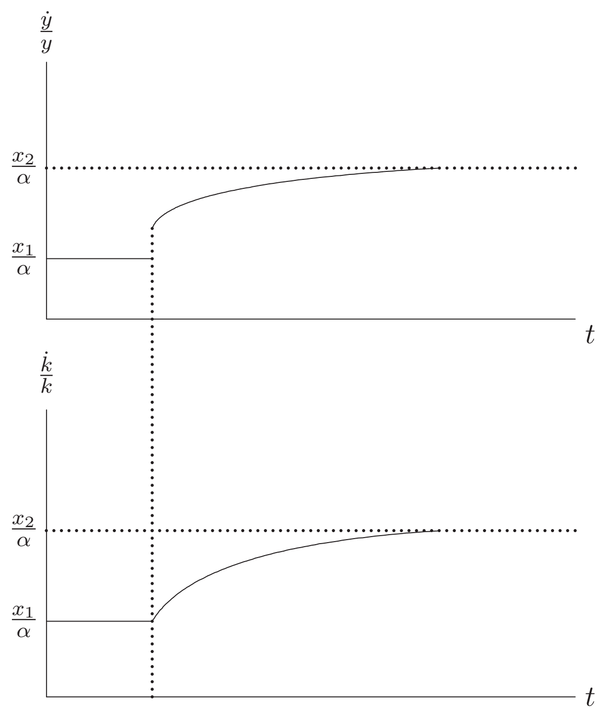


Figura 11.9: Aumento de la tasa de crecimiento de la productividad.

Es decir, cuando aumenta la tasa de crecimiento del progreso técnico, el nivel de capital per cápita sigue creciendo a la tasa x_1/α en el instante del cambio de x y después su tasa de crecimiento debe aumentar gradualmente a x_2/α. Para analizar qué sucede con el producto, recordemos que éste está dado en términos per cápita por $y = Ak^{1-\alpha}$. Diferenciando esta expresión y dividiendo por $Ak^{1-\alpha}$ obtenemos:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)\frac{\dot{k}}{k}$$

Reemplazando la ecuación (11.17) en la ecuación anterior se llega a:

$$\frac{x_1}{\alpha} < \frac{\dot{y}}{y} = \frac{x_1}{\alpha} + (x_2 - x_1) < \frac{x_2}{\alpha}$$

Es decir, la tasa de crecimiento del producto aumenta discretamente en el momento del cambio de x, pero por debajo de x_2/α, y luego su crecimiento se ajusta gradualmente a x_2/α. Estos dos resultados se pueden apreciar en la figura 11.9.

¿Qué pasa con el consumo per cápita? Claramente aumenta, ya que el producto siempre aumenta, y el consumo no es más que una fracción del ingreso. Por lo tanto podemos concluir, como era de esperar, que una mayor tasa de crecimiento de la productividad aumenta el crecimiento y el bienestar desde el instante en que sube la productividad.

Problemas

11.1. **Crecimiento**[13]. Considere una economía con los siguientes datos en un período:

$$\begin{aligned}
\frac{I}{Y} \equiv i &= 30\,\% && \text{tasa de inversión bruta} \\
\gamma &= 5{,}5\,\% && \text{crecimiento del PIB agregado} \\
\frac{K}{Y} &= 2{,}5 && \text{razón capital producto al inicio del período} \\
\delta &= 5\,\% && \text{tasa de depreciación} \\
\hat{L} &= 2\,\% && \text{tasa de crecimiento del empleo}
\end{aligned}$$

Suponga además que la función de producción está dada por la ecuacion (11.2) donde $\alpha = 0{,}6$.

a.) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del stock de capital?

[13] Para efectos de este problema, puede usar la aproximación que el crecimiento porcentual de un producto es igual a la suma de los crecimientos porcentuales de cada uno de sus términos.

b.) Usando contabilidad del crecimiento, determine cuál fue el crecimiento de la productividad total de factores durante ese período (denótelo x).

c.) Si esta economía quisiera crecer un 8 % en vez del actual 5,5 %, dados constantes los valores de x y $\hat{L}$, determine a cuánto tendría que subir la tasa de inversión.

d.) Considere que x es el valor de crecimiento de la productividad de largo plazo. Suponga además que la población crece a la misma tasa que el empleo dado por la ecuación (11.18). ¿Cuál es el crecimiento de largo plazo del producto per cápita y del producto agregado en esta economía? Compárelo con el crecimiento actual e interprete la diferencia de acuerdo con el modelo neoclásico de crecimiento.

e.) Suponga que la tasa de ahorro de la economía, s, es 30 %. ¿Es este supuesto razonable (considere que en la economía no hay gobierno)? ¿Cuál es la relación capital producto a la cual converge la economía?[14]

f.) Calcule la tasa de ahorro consistente con la regla dorada. ¿Cómo se compara con el 30 % supuesto en este problema? ¿Cómo se compara con la que usted calculó en la parte c.)? ¿Podría argumentar, suponiendo que la economía está en estado estacionario, que el 30 % o el valor encontrado en la parte c.) son subóptimos? ¿Por qué?

11.2. **Cuando los capitalistas ahorran más que los trabajadores.** Considere una economía cuya función de producción depende de capital y trabajo y suponga que los factores de producción reciben como pago el valor de sus productividades marginales. Al igual que en el modelo de Solow, supondremos que la tasa de ahorro es exógena. A diferencia de dicho modelo, supondremos que todo el ahorro lo realizan los capitalistas, quienes ahorran una fracción s de sus ingresos.

a.) Determine el nivel de k estacionario de esta economía. Muestre que si $s = 1$, este corresponde al nivel de la regla dorada.

b.) Muestre que a diferencia del modelo de Solow, en este caso no son posibles equilibrios dinámicamente ineficientes. Explique su resultado.

11.3. **Análisis posguerra.** Describa los efectos que predice el modelo de Solow en el período después de una guerra si:

[14] Para esta parte necesitará recordar la relación capital-producto de largo plazo como función de s y otros parámetros del modelo.

a.) Durante esta se produjo una destrucción del capital.

b.) Las bajas durante la guerra redundaron en una disminución de la mano de obra.

Considere el efecto de ambas hipótesis por separado.

11.4. **Modelo de Solow con migración** (basado en capítulo 9.1 de Barro y Sala-i-Martin, 2004). Bajo los supuestos del modelo de Solow, considere el caso de una economía cerrada en la cual existe la posibilidad de migraciones tanto hacia adentro como hacia afuera del país. El flujo de inmigrantes (denotado M) es:

$$M(K,L) = K - \overline{k}L \tag{11.18}$$

a.) Entregue una interpretación económica de esta ecuación. Además, escriba el flujo en términos per cápita e interprete el significado del parámetro $\overline{k}$.

b.) Determine la tasa de crecimiento de la población en este modelo.

c.) Suponga además que cada inmigrante trae (o se lleva) una cantidad k_o de capital. Determine la dinámica de Solow en términos per cápita para este modelo. Encuentre la expresión para el stock de capital per cápita en estado estacionario. Grafique. ¿Existe convergencia condicional?

d.) Considere ahora que los inmigrantes prácticamente no traen (o llevan) capital consigo al momento de irse de su país. Determine y grafique el estado estacionario. ¿Existe convergencia condicional?

e.) A partir de su respuesta en c.) determine qué ocurre con el capital per cápita de estado estacionario si k_o aumenta o disminuye. Interprete este resultado.

11.5. **Modelo de Solow con deuda pública.** En el modelo de Solow, suponga que el gobierno mantiene un nivel de deuda pública per cápita constante igual a $b \geq 0$. Es decir, en cada instante el gobierno vende b bonos a cada agente privado y recibe a cambio b unidades del único bien en la economía. El ahorro privado es una fracción s del total disponible por el sector. Las recaudaciones que obtiene el gobierno no son ahorradas por este.

a.) Muestre que para valores de b pequeños habrá dos estados estacionarios, de los cuales solo uno es estable.

b.) Denote el nivel de capital per cápita de este último por $k^*(b)$. Muestre que $k^*(b)$ es menor que el nivel de k^* cuando no hay deuda pública. Dé una interpretación económica de su resultado.

c.) ¿Qué sucede para valores grandes de b? También entregue una interpretación al respecto.

11.6. **Crecimiento e impuestos** (basado en el capítulo 2.3 de Sala-i-Martin, 2000). Considere una economía, sin crecimiento de la población (entonces podemos normalizar la población a 1) con la siguiente función de producción:

$$y = f(k) = Ak^{1-\alpha} \tag{11.19}$$

El capital se deprecia a una tasa δ.

El gobierno gasta un flujo g, el cual es financiado con una tasa de impuesto τ proporcional al ingreso (se recauda τy). El gobierno sigue una política de presupuesto equilibrado, o sea que en todo momento los ingresos de gobierno son iguales a sus gastos.

Las personas ahorran una fracción s de su ingreso disponible (neto de impuestos).

a.) Escriba la restricción de recursos de esta economía (demanda agregada igual producción o ahorro igual inversión).

b.) Determine el stock de capital de estado estacionario (k^*). Determine también el consumo (c^*) y la producción (y^*) de estado estacionario.

c.) Discuta intuitivamente el efecto que tienen los impuestos sobre el capital de largo plazo y discuta qué pasa con el crecimiento en la transición. Para esto último compare dos economías que tienen distintos τ, uno alto y uno bajo, y suponga que ambas parten de un nivel de capital menor que el capital de largo plazo. ¿Cuál de las dos economías crece más rápido?

d.) Considere una economía sin impuestos ni gasto de gobierno. ¿Cuál es el nivel de capital de la regla dorada (k^{RD})? Compare el nivel de capital de estado estacionario de la regla dorada con k^* de la parte *b)*. Determine cuál debería ser la tasa de impuesto (que si es negativa sería un subsidio) para que se llegue a la regla dorada. Discuta su resultado considerando la tasa de ahorro s y como se compara con la tasa de ahorro requerida para llegar a la regla dorada.

e.) Ahora cambiaremos un poco el problema para suponer que el gasto de gobierno es productivo, pero sujeto a congestión (piense en un camino). En consecuencia, la productividad total de los factores A

es una función creciente de $g/y = \tau$, es decir $A = A(\tau)$ con $A' > 0$ y $A'' < 0$. Más aún asumiremos que $A(\tau) = B\tau^{\epsilon}$. Calcule la tasa de impuesto que maximiza el consumo de estado estacionario. Comente intuitivamente por qué el impuesto óptimo no es 0.

Capítulo 12

Modelos de crecimiento: Extensiones

Sin duda, el modelo neoclásico es un instrumento muy útil para entender el crecimiento económico, pero puede ser adaptado para analizar otros temas importantes. En esta sección analizaremos algunas extensiones al modelo neoclásico básico.

12.1. El modelo de Solow ampliado: Capital humano

La fuerza de trabajo no es simplemente L, es decir, horas trabajadas. El trabajo tiene implícita cierta calidad y capacidad para ser más productivo, y esto es el **capital humano.** El conocimiento y las habilidades que adquiere la mano de obra hacen crecer el capital humano. El proceso de adquisición del conocimiento se puede hacer por la vía de sacrificar ingresos, dejando de trabajar y educándose, o se puede aprender en el mismo trabajo (learning-by-doing). Sin duda que la forma de adquisición de conocimientos dependerá del tipo de conocimientos de que se trate. En una primera etapa es posible pensar que basta con trabajar para aprender, pero a medida que los conocimientos se sofistican y especializan es necesario algún modo de educación más formal.

A continuación analizaremos dos maneras de formalizar capital humano. Ellas, aunque similares, tienen usos distintos en términos de lo que podemos aprender.

12.1.1. Sustitución perfecta capital humano-capital físico

Asumiremos, realistamente, que hay tres factores de producción: trabajo (horas), L, capital humano (conocimientos y habilidades), H, y capital físico, K. La función de producción es Cobb-Douglas con retornos constantes a escala y un parámetro A que denota productividad total de los factores:

$$Y = F(L, H, K) = AL^{\lambda}H^{\beta}K^{1-\lambda-\beta} \tag{12.1}$$

Para simplificar, consideraremos que L es constante. El supuesto crucial para simplificar el modelo es asumir que ambos tipos de capital se acumulan ahorrando ("se compran"), y la tasa de ahorro es la misma s. Asimismo, y para facilitar más el álgebra, asumiremos que ambos tipos de capital se deprecian a la misma tasa, δ. En este sentido decimos que ambos tipos de capital son perfectos sustitutos, no desde el punto de vista de la función de producción, donde la sustitución es imperfecta, sino desde el punto de vista de la acumulación. En consecuencia, expresando todo en términos per cápita, tenemos la siguiente ecuación de acumulación:

$$\dot{k} + \dot{h} = sf(h, k) - \delta(h + k) \tag{12.2}$$

Como debería ser evidente de esta ecuación, ambos tipos de capital son perfectos sustitutos. Así, podríamos trasladar cualquier cantidad de capital físico a capital humano en un instante. Lo que no podemos es aumentar el total de este "capital ampliado", ya que solo lo podemos hacer ahorrando y destinando parte de la producción a capital.

En consecuencia, la combinación óptima de ambas formas de capital será tal que la productividad marginal de ambos sea igual. De otra forma convendrá transformar capital menos productivo en el capital más productivo. Este movimiento hará que la productividad marginal del capital menos productivo suba, en la medida en que se reduce su stock, y la del más productivo se reduzca como producto de que hay más de él. Esta condición de igualdad de las productividades nos dará la razón óptima en que deben estar K y H en todo momento. Igualando las productividades marginales, tenemos:

$$\beta\frac{Y}{H} = (1 - \lambda - \beta)\frac{Y}{K} \tag{12.3}$$

Es decir, el capital humano siempre será la siguiente proporción del capital físico:

$$H = \frac{\beta}{1 - \lambda - \beta}K \tag{12.4}$$

Definiendo $\xi \equiv \beta/(1 - \lambda - \beta)$ y escribiendo todo en términos per cápita (la función de producción tiene retornos constantes a escala) se tiene que:

$$y = Ah^{\beta}k^{1-\lambda-\beta}$$

Pero ya vimos en (12.4) que $h = \xi k$ con lo cual llegamos finalmente a:

$$y = A\xi^{\beta}k^{1-\lambda} \tag{12.5}$$

Esta es una función de producción igual (ajustando la constante) a la estudiada en el modelo del capítulo pasado, con la única diferencia de que el nivel de capital por trabajador está elevado a la participación total del capital humano y el capital físico[1].

En este contexto, es razonable suponer que cada factor tiene una participación igualitaria en el producto. Es decir, $\beta = \lambda = 1 - \beta - \lambda = 1/3$. De esta forma, cuando se mide en conjunto el capital humano con el trabajo —como debe ser, ya que se cuentan horas trabajadas, pero con el capital humano incorporado—, tendríamos una participación cercana a los dos tercios. Sin embargo, al considerar que ambas formas de capital mantienen una misma proporción, la participación del capital se eleva a cerca de 2/3. Como veremos al analizar la evidencia en el próximo capítulo, este valor es más consistente con las velocidades de convergencia que se observan en la realidad.

Lo que ocurre en este caso es que, si bien contablemente H y L están unidos, desde el punto de vista de la mecánica del modelo neoclásico los factores reproducibles (K y H) son los relevantes en la dinámica del crecimiento. Y en este caso, los factores reproducibles tienen una participación en torno a los dos tercios.

12.1.2. Capital humano y educación

Otra forma de ver la acumulación de capital humano es considerar que la gente debe estudiar para tener más conocimiento, y el capital humano depende de la cantidad de estudios que ha tenido la fuerza de trabajo.

Consideremos la función de producción:

$$Y = AH^{\alpha}K^{1-\alpha} \tag{12.6}$$

El nivel de capital humano corresponde a:

$$H = e^{\phi u}L \tag{12.7}$$

Donde u es el nivel de educación de la fuerza de trabajo L y ϕ es un número positivo que representa la eficiencia del proceso educacional, es decir, la calidad de la educación. Al término $e^{\phi u}$ lo llamaremos capital humano per cápita, y lo denotamos por h. La diferencia básica de esta forma de especificar el capital humano con la anterior es cómo se acumula, y esta parece más realista. En este caso se requiere educarse para acumular capital humano.

El modelo en este caso es exactamente el mismo que el modelo analizado en el capítulo anterior, solo con un cambio en el parámetro tecnológico, que

[1] Esto es discutido con detalle en Mankiw, Romer y Weil (1992), quienes argumentan que esta es una extensión razonable al modelo de Solow para explicar los procesos de crecimiento en el mundo real.

incorpora el nivel y la calidad educacional:

$$Y = A(e^{\phi u}L)^{\alpha}K^{1-\alpha} \tag{12.8}$$

Charles Jones ha usado extensivamente esta función de producción para explicar las diferencias de ingreso per cápita entre países[2]. De la ecuación (11.16) obtenemos la razón entre capital y trabajo en estado estacionario, la que implica que el ingreso per cápita en estado estacionario será:

$$y = \left[\frac{s}{\delta + n + \frac{x}{\alpha}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} hA^{\frac{1}{\alpha}} \tag{12.9}$$

Usando esta expresión, podemos explicar por qué los países tienen distintos niveles de ingreso per cápita. Ignorando las diferencias de crecimiento de productividad, las que resultarían en distintas tasas de crecimiento y, por lo tanto, en trayectorias de ingreso divergentes[3], podemos ver que las diferencias de ingreso (asumiendo que se está en estado estacionario) se producen por: diferencias en la tasa de ahorro-inversión (s), diferencias en las tasas de crecimiento de la población (n), diferencias en el nivel del capital humano (h) y diferencias en la tecnología (A). El trabajo de Jones ha calibrado estas diferencias y ha demostrado que son poderosas para explicar los diferenciales de ingreso en el mundo. Por supuesto, esta es una primera aproximación, ya que deberíamos explorar más profundamente los determinantes de la inversión, la educación, la difusión de las tecnologías, y el crecimiento de la población.

Esta aproximación para medir capital humano es útil para cuando veamos modelos de crecimiento endógeno con acumulación de capital humano al final de este capítulo.

12.2. Trampas de pobreza

A partir del modelo neoclásico aquí queremos analizar si es posible que países se queden estancados en situaciones de pobreza, es decir, que se encuentren en una “trampa” de pobreza. Pensemos en los países del continente africano; exceptuando algunos casos, la mayoría de esos países ha crecido muy poco en los últimos treinta años. ¿Por qué? Más aún, podríamos pensar que si estos países lograran superar esta condición de pobreza podrían “despegar”. La idea es que puede haber equilibrios múltiples. Por un lado, si la economía es pobre se queda pobre y nada la saca de ahí. Por otro lado, si la economía es rica, podrá también quedarse en esa posición.

[2] Véase Jones (2000)

[3] Jones (2000) y sus otros trabajos discuten más en detalle este hecho, pero como una primera aproximación es útil para explicar las diferencias de ingreso.

Una alternativa para explicar esto es suponer que la tasa de ahorro del país es baja para un nivel bajo de capital y es alta para niveles altos de capital. Es decir, un país pobre tendría bajo ahorro, lo que al mismo tiempo significa que su equilibrio será con un nivel de ingreso bajo. Por el contrario, si la economía tiene un nivel de ingreso elevado y tiene un ahorro elevado, entonces su ingreso de equilibrio será alto. Formalmente esto es:

$$\begin{aligned} s &= s_1 \quad \text{para} \quad y < \hat{y} \\ s &= s_2 \quad \text{para} \quad y \geq \hat{y} \end{aligned} \tag{12.10}$$

Donde $\hat{y} = f(\hat{k})$ es el nivel de ingreso que una vez superada la tasa de ahorro tiene un salto discreto. Gráficamente esta idea se ve en la figura 12.1.

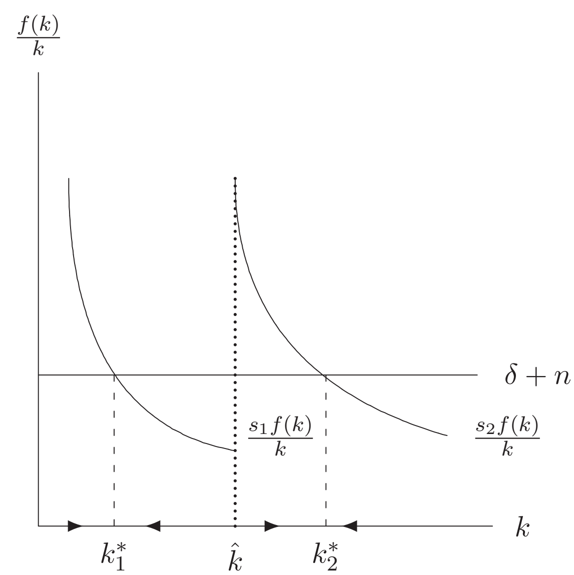


Figura 12.1: Trampa de la pobreza.

Cuando el país tiene bajo nivel de capital su tasa de ahorro es baja porque su consumo se puede encontrar cerca de su nivel de subsistencia, por lo tanto el individuo no puede ahorrar, porque tiene poco o nada que ahorrar. La fracción de su ingreso que destina al ahorro es baja. Por otra parte, cuando el nivel de capital y de ingreso es alto, su tasa de ahorro es mayor, porque ahora tiene recursos para satisfacer sus necesidades básicas, más consumo e incluso ahorrar. Por lo tanto, un país que se encuentra en un estado estacionario pobre podría permanecer así por mucho tiempo.

Este tipo de explicaciones puede ayudar a racionalizar la ayuda internacional, sin embargo, el problema de este tipo de ayuda es que resulta difícil estimar cuánto capital necesita el país para pasar de un equilibrio pobre a rico, es decir, si un país recibe una cantidad insuficiente de capital puede ser que la ayuda no sirva para sacar al país de la situación de pobreza. Segundo, existe un serio problema de riesgo moral para los países con la ayuda internacional. Si la ayuda internacional se da como un flujo a países que clasifican por ser pobres, el progreso puede reducir la posibilidad de mayor ayuda. Este es un argumento similar al que se usa para criticar el estado de bienestar, a través del cual existen muchas donaciones que en la práctica no sirven al propósito de inducir a la gente a aumentar sus ingresos. Por el contrario, conviene mantenerse esforzándose poco si la ayuda es elevada. Sin embargo, debemos agregar un problema adicional, y tal vez más preocupante, de la ayuda internacional, y es la posibilidad de que la ayuda sea capturada en redes de corrupción. No es obvio cuál es la respuesta correcta, pero claramente establecer ayuda por un período acotado, atada a ciertos progresos (entre otros) y con buenos mecanismos para verificar *ex post* su uso son recetas básicas para que la ayuda tenga máxima efectividad.

Otra manera análoga de explicar trampas de pobreza es suponer que la función de producción $Ak^{1-\alpha}$ tiene dos valores de A. Para un nivel de capital bajo, el conocimiento es limitado y los efectos del capital para inducir mayor conocimiento en el resto de la economía son limitados. En cambio, cuando el capital supera cierto nivel, sus efectos sobre el resto de la economía son mayores, induciendo aumentos de productividad y por lo tanto un A mayor.

Estos modelos son simples extensiones del modelo neoclásico, pero con una interpretación muy sugerente sobre las razones por las cuales algunos países se estancan en situaciones de pobreza. Cabe entonces preguntarse cuán importantes pueden ser estas trampas de pobreza. Una calibración de este tipo de modelos ha sido usada por Kraay y Raddatz (2005) para evaluar esta hipótesis en países africanos y ellos concluyen que el modelo no es capaz de explicar sus bajos niveles de ingreso.

12.3. Crecimiento endógeno: El modelo AK

¿Es posible que las economías crezcan para siempre sin necesidad de asumir que hay un crecimiento exógeno? ¿Hay alguna fuerza endógena a la economía que puede permitir que el conocimiento y la producción se reproduzcan permanentemente? En esta sección queremos analizar las respuestas a estas interrogantes.

Antes del análisis es bueno señalar que este tema ha sido uno de los que ha tenido mayores progresos y ha involucrado mayores esfuerzos de investigación en macroeconomía desde mediados de los ochenta. Después de importantes avances a fines de los 50 y principios de los 60, el interés por la teoría del crecimiento decayó. No fue sino hasta mediados de la década de 1980, cuando hubo disponibilidad de grandes bases de datos, así como avances teóricos que permitían analizar casos de crecimiento más complejos, que la teoría del crecimiento se revitalizó. Una de las áreas de mayor avance es la teoría del crecimiento endógeno, la que intenta explicar la posibilidad de que el crecimiento se pueda sostener sin necesidad de suponer alguna fuerza externa. Su éxito es discutible, y el consenso se acerca a versiones "extendidas" del modelo de Solow, pero sin duda las investigaciones han permitido estudiar con mucho detalle uno de los fenómenos más interesantes en economía: ¿por qué algunas economías crecen mientras que otras se estancan y empobrecen? ¿Por qué hay diferenciales de ingreso tan grandes y persistentes entre las economías del mundo?

Para que exista crecimiento en el largo plazo de alguna manera tenemos que explicar o suponer que el capital efectivo (hablaremos del significado más adelante) no presenta retornos decrecientes. Al menos la productividad marginal del capital no puede caer de manera sistemática. La formalización más sencilla es asumir la siguiente función de producción[4]:

$$Y = AF(K, L) = AK \tag{12.11}$$

Este es conocido como el modelo "AK". Al asumir una tasa de ahorro constante s, si la población crece a una tasa n tendremos que:

$$\dot{k} = sAk - (\delta + n)k$$

Con lo que llegamos a la siguiente expresión para la tasa de crecimiento del producto y el capital:

$$\gamma_y = \gamma_k = sA - (\delta + n) \tag{12.12}$$

Esto se puede apreciar en la figura 12.2.

En la figura se puede observar que este tipo de modelos predice que los países crecen para siempre y la tasa de crecimiento no depende del nivel de capital. En este tipo de modelos no existe convergencia. Las disparidades de ingreso entre los países se mantendrían para siempre.

Otra implicancia muy importante de este modelo es que un aumento en la tasa de ahorro genera mayor crecimiento para siempre, y no solo en la transición al estado estacionario como en el modelo de Solow. Aquí nunca habrá ahorro excesivo, porque este permite crecer permanentemente más rápidamente.

La función de producción Ak fue originalmente propuesta en el modelo de Harrod-Domar a fines de la década de 1930 y en la de 1940. Sin embargo,

[4] Este modelo, con consumidores que deciden endógenamente su tasa de ahorro, fue desarrollado en Rebelo (1990).

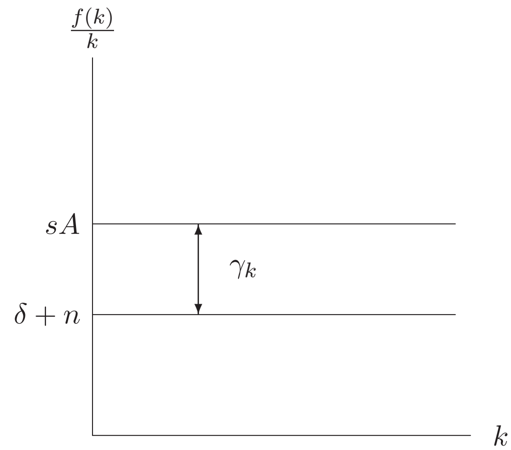


Figura 12.2: Modelo AK.

ellos suponían que la función de producción Ak era válida hasta un nivel dado de k, a partir del cual el capital tenía productividad 0. Este modelo no fue usado para explicar el crecimiento de largo plazo sino la relación crecimiento-inversión, como en el modelo del acelerador, y su interacción con el desempleo, en el contexto de la recuperación de la Gran Depresión[5].

Sin embargo, el problema de estos modelos es que, si incluimos el factor trabajo en la función de producción, esta presenta retornos crecientes a escala[6]. El problema de las funciones de producción con retornos crecientes a escala es que no se puede definir un equilibrio competitivo y la producción estaría dominada por una sola empresa. Para evitarlo, hay que enfrentar problemas con cierta complejidad técnica, pero que intuitivamente son más o menos sencillos. Para ello hay que reinterpretar K de manera que pueda ser consistente con una historia en la cual las empresas no tienen el problema de las economías de escala, o al incorporar el factor trabajo no introduzcamos las economías de escala. En la siguiente sección examinaremos algunas formas de obtener este tipo de linealidad, pero una forma simple de entender este tipo de tecnologías es pensar que "K" es capital ampliado, más allá de maquinarias, equipos y edificios. Para producir, las empresas no ocupan solo el capital físico sino también otras formas de capital. Por ejemplo, capital organizacional, información, etcétera.

Una extensión al modelo AK para incluir algún grado de convergencia sería

[5]Para mayores detalles, ver problema 12.2.

[6]Retornos constantes al capital significa que la función de producción es del tipo AK. Al agregar un nuevo factor con rendimientos decrecientes, la función de producción tendrá retornos crecientes a los factores, quedando del tipo AKL^{α}.

postular que la función de producción es[7]:

$$Y = AK + BK^{1-\alpha}L^{\alpha} \tag{12.13}$$

La evolución del capital per cápita se puede observar en la figura 12.3. En este caso hay convergencia en el sentido que para una misma tasa de crecimiento de largo plazo, las economías más pobres crecerán más rápido, aunque nunca alcanzarán a las más avanzadas puesto que el crecimiento es permanente.

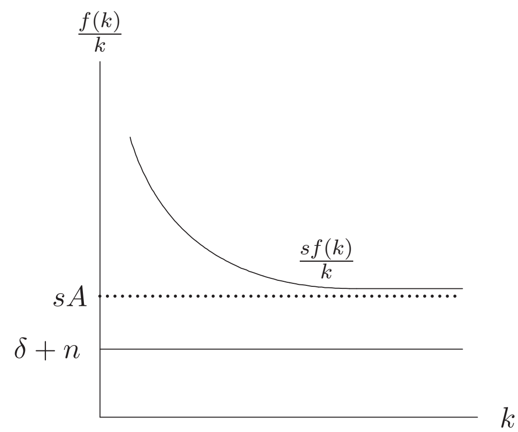


Figura 12.3: Modelo AK extendido.

12.4. Crecimiento endógeno: Externalidades y capital humano

Como ya discutimos, lo que necesitamos para que haya crecimiento endógeno es que la productividad marginal del factor reproducible no caiga a 0 a medida que este factor crece, o simplemente que la tecnología sea de retornos constantes a este factor.

Una manera de generar esta linealidad es suponer que hay externalidades al capital[8]. Si bien en las empresas habrá retornos constantes al capital y al trabajo, lo que garantiza la existencia de un equilibrio competitivo, a nivel agregado puede haber una externalidad. En este caso la función de producción sería:

$$y = Ak^{1-\alpha}\bar{k}^{\alpha}L^{\alpha}$$

[7] Esta función de producción fue propuesta por Jones y Manuelli (1992), y es discutido en el contexto del modelo de Solow en problema 12.3.

[8] Ver Romer (1986).

Donde k es el capital de la empresa, pero $\bar{k}$ es alguna forma de capital agregado externo a la empresa, de manera que estas no enfrentan economías de escala, aunque a nivel agregado sí las hay. Esto puede ser una externalidad del conocimiento. A medida que haya más capital, habrá más conocimiento, del cual no se puede apropiar el inversionista sino que se disemina a través de toda la economía. En el agregado la función de producción es lineal en capital.

Otra alternativa para generar crecimiento endógeno es considerar la acumulación de capital humano. La característica clave de pensar en el trabajo como capital humano es que se puede acumular. El trabajo se reproduce a la tasa de crecimiento de la población y es, en una primera aproximación, un dato. Sin embargo la fuerza de trabajo se puede hacer más eficiente invirtiendo en capital humano. Por ejemplo, sacrificando trabajo y usando ese tiempo en estudiar se puede mejorar la calidad de la mano de obra, o sea tener más capital humano. Si denotamos el capital humano per cápita por h, la función de producción en términos per cápita sería:

$$y = Ak^{1-\alpha}h^{\alpha} \tag{12.14}$$

Lucas (1988) sugiere que la acumulación de capital humano se produce destinando tiempo a la educación tal como se discute en 12.1.2. La acumulación de capital humano está dada por:

$$\dot{h} = \phi uh - \delta_h h \tag{12.15}$$

Donde u es la fracción del tiempo que los individuos ocupan en acumular capital humano educándose, mientras $1-u$ es la fracción de tiempo destinada a trabajar. La tasa de depreciación del capital humano es δ_h y ϕ es la eficiencia de la educación. Al usar esta especificación para el crecimiento del capital humano, muy distinta del caso en que asumimos que K y H eran perfectos sustitutos, tendremos que h crece dependiendo del tiempo dedicado a la educación y su eficiencia, y esto genera crecimiento permanente del ingreso per cápita sin necesidad de asumir que la productividad total de los factores, A, crece exógenamente.

El motor de crecimiento será el capital humano, pero para hacer un análisis más detallado del proceso de crecimiento y el efecto de las políticas debemos no solamente especificar la evolución del ahorro, tal como se hace en el modelo de Solow al asumir una tasa de ahorro constante, sino además analizar la determinación de u.

Problemas

12.1. **Modelo de Solow y trampas de pobreza.** Suponga una economía sin crecimiento de la población, con una tasa de depreciación del capital

δ, una tasa de ahorro constante e igual a s y una función de producción (per cápita) igual a:

$$y = ak^{\alpha} \tag{12.16}$$

Donde a es un parámetro de productividad dado por:

$$a = a_1 \quad \text{para} \quad k < \tilde{k} \tag{12.17}$$

$$a = a_2 \quad \text{para} \quad k \geq \tilde{k} \tag{12.18}$$

Donde

$$a_1 < \tilde{k}^{1-\alpha}(\delta/s) < a_2 \tag{12.19}$$

La idea es que cuando el nivel de producción es elevado también lo es la productividad dado que hay más conocimiento para difundir, se aprovechan economías de escala, etcétera.

a.) Muestre que hay dos estados estacionarios y encuentre el valor del producto de equilibrio en estos dos puntos, y_1 e y_2. Diga de qué sirve la condición (12.19), y qué pasa si:

$$\tilde{k}^{1-\alpha}(\delta/s) < a_1 < a_2 \tag{12.20}$$

b.) Muestre que si la tasa de ahorro aumenta, una economía estancada en el equilibrio de bajo ingreso podría salir de él. Justifique además que incluso un aumento "transitorio" de la tasa de ahorro podría sacar a la economía de la trampa de pobreza.

12.2. **La controversia de Harrod-Domar** (basado en el capítulo 2.6 Sala-i-Martin, 2006). Harrod (1939) y Domar (1946) son los trabajos más importantes en crecimiento económico antes de los trabajos de Solow y Swan. Harrod y Domar trabajaron con la función de producción de Leontief:

$$Y = \text{mín}(AK, BL) \tag{12.21}$$

Donde A y B son constantes tecnológicas. Con esta función se utilizan plenamente los recursos productivos de la economía solo si $AK = BL$. En efecto si $AK \leq BL$ hay trabajadores desempleados.

Excepto por la función de producción anterior, en el modelo de Harrod y Domar se cumplen los supuestos estándares del modelo de Solow.

a.) Muestre que no habrá factores de producción ociosos en estado estacionario si y solo si $sA = n + \delta$.

b.) Harrod y Domar concluyeron que en economías capitalistas es inevitable que existan factores de producción ociosos que crecen sin límites. Relacione esta conclusión con el resultado anterior.

12.3. **Crecimiento endógeno o exógeno.** Considere una economía con función de producción:

$$Y = AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{12.22}$$

Donde K denota el stock de capital, L el número de trabajadores y A, B y α constantes positivas con $0 \leq \alpha \leq 1$. Esta economía cumple con todos los supuestos del modelo de Solow, salvo que la función de producción no satisface una de las condiciones de Inada[9]. Denotamos la tasa de ahorro mediante s, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo mediante n, la tasa de depreciación mediante δ y el capital por trabajador mediante $k = \frac{K}{L}$. No hay progreso tecnológico y suponemos que $sA \geq n + \delta$. A continuación se le pide que responda varias preguntas. Recuerde que $\dot{k}$ está dado por la ecuación (11.5).

a.) Determine la tasa de crecimiento de k: $\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k}$. ¿A qué valores converge γ_k a medida que k crece?

b.) Diga en cuánto aumenta γ_k si:

i. s aumenta enΔ s.

ii. n disminuye enΔ n.
Determine en cada caso si se trata de un efecto transitorio o permanente.

c.) Compare sus respuestas en la parte final de b.), si el efecto es transitorio o permanente, con los resultados correspondientes del modelo de Solow.

d.) Sin ningún cálculo adicional, determine si en el modelo anterior se tiene:

i. Crecimiento endógeno.

ii. Que los países más pobres crecen más rápido que los países más ricos (convergencia).

12.4. **Crecimiento con tasa de ahorro variable.** Considere un modelo tradicional de crecimiento donde: $y = f(k)$ y la tasa de depreciación es igual a δ. La única diferencia es que ahora la tasa de ahorro no es constante sino que depende de k, es decir, $s = s(k)$.

a.) Escriba la restricción presupuestaria de la economía, y despeje $\dot{k}$.

[9]Las condiciones de Inada corresponden a que el producto marginal de cada factor tiende a cero cuando $K \to \infty$ y $L \to \infty$ y tiende a infinito cuando $K \to 0$ y $L \to 0$.

En lo que sigue discutiremos la posibilidad de que existan múltiples equilibrios, y las implicancias de esta situación en las políticas de ayuda a países subdesarrollados.

Se ha determinado que en un país pobre la tasa de ahorro depende del stock de capital de la siguiente forma:

$$s(k) = \left(\frac{k}{k+20}\right)^{10} \tag{12.23}$$

Junto con esto, se sabe que la función de producción puede ser expresada como:

$$f(k) = 5k^{0,5} \tag{12.24}$$

Además, la depreciación es $\delta = 0{,}14$.

b.) Grafique en el espacio $(\dot{k}, k)$ o $(\frac{\dot{k}}{k}, k)$ el equilibrio y determine el número de ellos. En particular, discuta si $y = k = 0$ es un equilibrio. Indicación: grafique los puntos en que $k = \{0, 100, 200, 500, 1000\}$.

c.) Analice la estabilidad de cada equilibrio.
El Banco Mundial ha visto que este país se encuentra en una situación crítica puesto que $k = 0$, y propone hacerle un préstamo. Conteste lo siguiente:

d.) ¿Qué sucederá con este país en el largo plazo si el préstamo asciende a 100?

e.) ¿Cómo cambia su respuesta si el préstamo asciende a 300?

Capítulo 13

Evidencia empírica

Hay tres aspectos importantes al momento de analizar la evidencia respecto del crecimiento económico. El primero es el enfoque tradicional de descomponer el crecimiento en su “fuentes”, esto es, aumento de dotación de factores *vis-à-vis* aumento de la productividad de los factores. La descomposición del crecimiento en la contribución de la acumulación de factores versus crecimiento de la productividad tiene importantes implicancias. El crecimiento de largo plazo en el modelo neoclásico depende solo de la productividad. Por otra parte para acumular factores es necesario ahorrar, es decir, sacrificar consumo, mientras que el crecimiento de la productividad no requiere dicho esfuerzo. Por ello hay quienes ironizan planteando que este tipo de descomposiciones revela si el crecimiento ha sido resultado de la “inspiración” (productividad) versus “transpiración” (ahorro e inversión). Como se discute más adelante, este ha sido un tema que ha generado mucho debate en torno al milagro asiático.

El segundo tema que abordaremos, y que ha estado presente en nuestra discusión de los modelos teóricos, es el de la convergencia de los niveles de ingreso entre países. Esto también se ha analizado en las regiones de un mismo país.

Por último, se discute la evidencia empírica respecto de determinantes del crecimiento, y las variables que aparecen en la literatura empírica como factores que estimulan el crecimiento.

Cabe advertir que en este capítulo se presenta una visión muy general sobre la evidencia del crecimiento sin entrar en detalles técnicos. Tampoco se intenta resolver discusiones que aún son motivo de serios esfuerzos de investigación. Existen libros especializados en materia de crecimiento que analizan la evidencia con mucho mayor detalle[1].

[1] Para una discusión detallada sobre convergencia, fuentes de crecimiento y determinantes del crecimiento ver Barro y Sala-i-Martin (2003). Para una discusión sobre descomposición en niveles y aplicaciones del modelo de Solow, ver Jones (2000) y Parente y Prescott (2002). Un excelente libro que intenta poner esta evidencia en perspectiva con muchas aplicaciones y discusiones del mundo

13.1. Contabilidad del crecimiento: Aspectos analíticos

Hasta el momento hemos supuesto que la capacidad de producción de un país se puede resumir en la siguiente función:

$$Y = AF(K, L) \tag{13.1}$$

Por lo tanto desde el punto de vista contable los países pueden crecer porque crece la productividad total de los factores, el stock de capital o la cantidad de trabajadores. La descomposición del crecimiento es otro de los aportes fundamentales de Solow, quien propuso realizar esta descomposición contable, estimando A como un residuo, al que se le llama **productividad total de los factores** o **residuo de Solow**.

Sin embargo, hay que ser cuidadosos al interpretar estos resultados, ya que este análisis no nos permite entender las *causas* del crecimiento, es decir, por qué en unos países A crece más que en otros, o por qué unos países acumulan más K y L que otros, pero sí la composición de este crecimiento. Recordemos que, en el modelo de Solow, si A crece a la tasa x, en estado estacionario el producto per cápita crece a x/α, donde α es la participación del trabajo. A continuación presentaremos el enfoque tradicional de descomposición del crecimiento (enfoque primal), luego lo analizaremos desde el punto de vista del modelo de Solow, para finalmente presentar una medición alternativa que se concentra en los ingresos y es conocida como el enfoque dual.

(a) Enfoque primal

Para iniciar la descomposición podemos aplicar logaritmo y diferenciar la ecuación (13.1) para llegar a:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \frac{dF}{F} \tag{13.2}$$

Para poder proseguir y estimar las fuentes del crecimiento, haremos algunos supuestos:

- La función de producción presenta retornos constantes a escala.
- Existe competencia en el mercado de bienes y factores.

Como la función de producción tiene retornos constantes a escala, se puede escribir como[2]:

$$F = F_K K + F_L L \tag{13.3}$$

real es Easterly (2001).

[2]Cuando una ecuación tiene rendimientos constantes a escala significa que: $F(\lambda K,\lambda L) = \lambda F(K, L)$. Es decir cuando los factores se expanden en una proporción dada, el producto también se expande en dicha proporción. Derivando la ecuación anterior con respecto a λ y evaluando en $\lambda = 1$ se tiene $F_K K + F_L L = F$.

Esto se conoce como la ecuación de Euler. Diferenciando la función de producción se llega a:

$$dF = F_K dK + F_L dL \tag{13.4}$$

Reemplazando las ecuaciones (13.3) y (13.4) en la ecuación (13.2), y tras un poco de álgebra, se tiene que:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \left(1 - \frac{F_L L}{F}\right)\frac{dK}{K} + \frac{F_L L}{F}\frac{dL}{L} \tag{13.5}$$

Suponemos competencia en los mercados de bienes y mercados de factores, lo que en este último caso significa que el pago al trabajo es igual a su productividad marginal, es decir, $PAF_L = W$, donde P es el precio del bien y W el salario nominal.

Dado que $AF = Y$ y además bajo el supuesto de competencia en el mercado de bienes tenemos que:

$$\frac{F_L L}{F} = \frac{WL}{PY} = \alpha \tag{13.6}$$

Donde α es la participación del trabajo[3]. Reemplazando (13.6) en (13.5) obtenemos la fórmula que nos permitirá descomponer el crecimiento del producto en el crecimiento de la productividad total de los factores y el aporte del crecimiento de los factores[4]:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = (1-\alpha)\frac{\Delta K}{K} + \alpha\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A} \tag{13.7}$$

Donde el primer término del lado derecho corresponde a la contribución que hace el capital al aumento del producto, el segundo término es la contribución del trabajo y el tercer término es la contribución de la productividad. Esta fórmula nos permite obtener en forma de residuo (residuo de Solow) el crecimiento de la PTF.

Otra forma de escribir esta descomposición del crecimiento es:

$$\frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta L}{L} = (1-\alpha)\left(\frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta L}{L}\right) + \frac{\Delta A}{A} \tag{13.8}$$

Donde el término al lado izquierdo corresponde al crecimiento del producto per cápita (más precisamente el producto por trabajador[5]) que puede descomponerse en la contribución del aumento del capital por unidad de trabajo más la contribución del crecimiento de la productividad total de los factores.

---

[3] Esto es directo para una función Cobb-Douglas donde $Y = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$, pero aquí se presenta el caso más general. En caso que el lector se complique basta pensar en una función Cobb-Douglas.

[4] En este caso hemos reemplazado el diferencial d por Δ.

[5] Pero en el largo plazo podemos esperar que el empleo y la población crezcan a tasas parecidas. Esto, no obstante, puede ser discutido, ya que en muchos países se observan cambios en la tasa de participación, es decir, en el porcentaje de gente en edad de trabajar que desea hacerlo. Por ejemplo, la incorporación de la mujer a la fuerza de trabajo ha implicado que el empleo ha crecido más rápidamente que la población.

(b) Contabilidad y el modelo de Solow

Antes de revisar la evidencia es útil ver cómo funciona la descomposición en el modelo neoclásico con crecimiento de la productividad. Usando la ecuación (13.7), tenemos que el producto crece en estado estacionario a $n + x/\alpha$. El trabajo crece a n, que con una participación de α, da una contribución de αn. El capital crece al igual que el producto, el cual multiplicado por su participación da una contribución de $(1-\alpha)(n+x/\alpha)$. Calculando el crecimiento de la productividad como residuo, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta A}{A} &= n + \frac{x}{\alpha} - \alpha n - (1-\alpha)(n + \frac{x}{\alpha}) \\ &= x\end{aligned}$$

Esto es exactamente lo que supusimos, que el parámetro de productividad A crecía a una tasa x. La causa fundamental del crecimiento en esta economía es x y n, y la descomposición del crecimiento nos sirve para tener alguna estimación de cuánto es x en la economía. Por lo tanto no se debe pensar que este ejercicio encuentra las "causas del crecimiento", sino que nos permite recuperar el valor de x y también entender el proceso de crecimiento hacia el estado estacionario. Tradicionalmente a esta descomposición del crecimiento se le llama también fuentes del crecimiento (*sources of growth*).

(c) Enfoque dual

Una alternativa a usar la función de producción para encontrar el residuo de Solow, o PTF, es partir de la igualdad entre ingresos y pagos a los factores:

$$PY = RK + WL \tag{13.9}$$

Diferenciando esta expresión y dividiéndola por Y llegamos a:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{RdK}{PY} + \frac{KdR}{PY} + \frac{WdL}{PY} + \frac{LdW}{PY} \tag{13.10}$$

Lo que es lo mismo que:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{RK}{PY}\left[\frac{dR}{R} + \frac{dK}{K}\right] + \frac{WL}{PY}\left[\frac{dW}{W} + \frac{dL}{L}\right] \tag{13.11}$$

Por último, usando el hecho de que $\alpha = WL/PY$ y $(1-\alpha) = RK/PY$ y reemplazando la descomposición primal para reemplazar dY/Y de acuerdo a (13.7) llegamos a la siguiente expresión para la descomposición dual[6]:

$$\frac{\Delta A}{A} = (1-\alpha)\frac{\Delta R}{R} + \alpha\frac{\Delta W}{W} \tag{13.12}$$

[6] Nuevamente se reemplazan los d por Δ.

Esta es otra forma de calcular la PTF sin necesidad de calcular el stock de capital ni la mano de obra. Solo obteniendo datos confiables para el retorno de los factores y la participación de los mismos en la producción es posible derivar la tasa de crecimiento de A.

13.2. Los datos

Uno de los aspectos fundamentales para calcular la contabilidad del crecimiento es estimar correctamente el nivel de capital, el nivel de empleo y la productividad. Mencionaremos a continuación algunos de los problemas típicos que se puede tener al hacer estas estimaciones.

- Empleo (L): en la mayoría de los países existen organismos que se encargan de medir periódicamente el nivel de empleo. Sin embargo, el problema que surge es que un trabajador hoy no es lo mismo que un trabajador de hace veinte años, pues el trabajador de hoy tiene más capital humano que el trabajador de hace veinte años. Su nivel de conocimiento es mayor, no porque sea más capaz, sino porque la información que tiene acumulada le permite ser más productivo. Por lo tanto, es necesario corregir el nivel de empleo por algún tipo de índice que mida la calidad de la mano de obra y nos aproxime a una buena medida de capital humano. Alguna de las formas de hacer esto es a través de los años de escolaridad de la fuerza de trabajo, que puede ser una aproximación a la cantidad de capital humano. Sin embargo, esto refleja solo parcialmente los mejoramientos de calidad. Alguien podría pensar que también hay que corregir la fuerza de trabajo por el hecho de que hoy trabajan con mejores máquinas, por ejemplo computadores, lo que los hace ser más productivos. Eso sería un grave error, ya que eso debería estar medido en K. En este caso la gente es más productiva porque tiene más capital para trabajar. Lo que queremos medir es que dado K y dada la tecnología, resumida en A, la gente es capaz de producir más.

  Si bien podemos medir bien la gente que está trabajando, no sabemos bien su utilización como trabajadores efectivos. Esto es lo que se conoce como *retención del trabajo* (del inglés *labor hoarding*). Las empresas, cuando no necesitan un trabajador, no lo despiden de inmediato, pues en el futuro pueden necesitarlo. En este caso pueden dedicarlo a tareas poco productivas para luego asignarlo a trabajos más productivos cuando las necesidades de producción son mayores. Este problema no es menor y se ha argumentado que esta es una de las principales razones por qué la productividad de los factores es procíclica. Suponga que cuando viene una recesión las empresas deciden que una fracción de sus trabajadores no trabaje, aunque en las encuestas aparezcan empleados. Se le asignará una importancia menor a la caída del empleo explicando la recesión, si el empleo aparece sobreestimado. La contraparte de esto es que la caída del empleo no contabilizada se le atribuirá al residuo de Solow, induciendo prociclicidad, cuando en la realidad podría no haber.

- Capital (K): El stock capital de un país corresponde a la suma de todas las inversiones realizadas en él durante el pasado, descontada la depreciación. En este caso es necesario hacer algún supuesto sobre la tasa de depreciación y el stock de capital inicial. A partir de estos supuestos, más los datos históricos de inversión, es posible calcular el stock de capital todos los años. Para calcular de esta forma el capital, partimos de la relación entre capital e inversión:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \tag{13.13}$$

Podemos usar esta ecuación para despejar K_t en función de K_{t-1}, que reemplazado en (13.13) nos lleva a:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)^2 K_{t-1} + I_t + (1 - \delta)I_{t-1} \tag{13.14}$$

Siguiendo análogamente, obtenemos al final que:

$$K_{t+1} = \sum_{j=0}^{t} I_{t-j}(1 - \delta)^j + (1 - \delta)^{t+1} K_0 \tag{13.15}$$

Esta última ecuación nos permite visualizar que para calcular el stock de capital de un país es necesario conocer δ, las inversiones y K_0.

No conocemos K_0, pero podemos usar lo que hemos aprendido para hacer una "aproximación juiciosa". Sabemos que en estado estacionario el coeficiente capital producto es $K/Y = s/(\delta + \gamma)$. Tenemos información de Y, γ, y s (se usa tasa de inversión), con lo cual podemos hacer una aproximación a K en 0 como si estuviera en estado estacionario[7]. Mientras más atrás en el pasado es $t = 0$, menos efectos tiene el supuesto de K_0 sobre la medición, incluso hay quienes suponen que es 0, y en la medida en que el período sea suficientemente largo no se estaría cometiendo un error muy significativo.

Sin embargo, existen algunos problemas si se basa el cálculo de K solo en esta definición. Estos son:

  - Utilización del capital: al igual que en el caso de empleo, no siempre el capital está plenamente utilizado, por lo tanto la cantidad efectiva

[7]Esta forma de fijar el capital inicial fue sugerida en Harberger (1978).

de capital que se está usando puede ser menor que la total. Esto es similar al efecto de la retención de empleo. En los países desarrollados se realiza encuestas que preguntan a las empresas cuánto de su capacidad están utilizando, sin embargo, las medidas son imprecisas, en especial en economías menos desarrolladas. Este problema es particularmente importante cuando se trata de medir el capital anual y estimar la productividad trimestral o anual (esto es en frecuencias de ciclo económico), donde la utilización puede variar mucho al ritmo en que fluctúa el ciclo económico. En frecuencias más largas, por ejemplo décadas, este problema es menos importante, porque podemos pensar que en el largo plazo estamos en torno a la plena utilización, pero en períodos cortos puede ser problemático. Piense por ejemplo qué pasa si de un año a otro hay una fuerte recesión donde el capital no creció, pero su utilización cae en un 10 %, esto es una caída del capital efectivamente usado de un 10 %, con una participación de 0,3. Cuando no consideramos la utilización estaremos estimando 0 % de contribución del capital; cuando lo medimos correctamente, es una contribución negativa de -3 %. Si el PIB cayó en -2 % (y el empleo se mantiene constante), en el caso de la mala medición diremos que lo que pasó fue una caída del residuo en 2 %, cuando lo que ocurrió efectivamente es que la productividad creció un 1 % y la caída en el capital efectivamente usado explica la caída del PIB en un 2 %.

  - Calidad del capital: el capital de hoy, al igual que el empleo, tiene un nivel de calidad mayor al capital de hace veinte años, por lo tanto es necesario ajustar el capital por su calidad cuando se quiere medir su contribución al crecimiento. Un caso importante son las diferencias entre el capital en forma de maquinarias y equipos versus el capital residencial. La literatura ha mostrado que el primero es más productivo, de modo que una manera sencilla de incorporar esto en la medición del capital es considerar los cambios de composición del capital, y en la medida en que la participación de la maquinaria y equipo aumente, el capital se hará de mejor calidad.

- Participación de factores (α y $1-\alpha$). Esto es definitivamente complicado, en especial en economías en desarrollo. Existen esencialmente dos formas tradicionales de estimar la participación de los factores:

  - La primera consiste en medir directamente de las cuentas nacionales la participación en el ingreso total de los ingresos de los distintos factores de producción. Esta es una manera directa que usa las identidades de ingreso (ver capítulo 2). El problema de esto es la clasificación de los ingresos. Por ejemplo, el trabajo informal, no contabilizado, debería ser catalogado como ingreso del trabajo. Sin embargo, el ingreso al trabajo se mide directamente y el ingreso al capital se obtiene como residuo. Entonces el ingreso al trabajo informal se puede, erróneamente, contabilizar como ingreso de capital. Esta es una razón importante de por qué la participación del trabajo es a veces menor en los países en desarrollo.

– La otra forma tradicional es estimar directamente una función de producción y de ahí obtener los parámetros. Este método pareciera ser más adecuado, aunque tiene el inconveniente de que no permite que las participaciones puedan cambiar en el tiempo, en particular si la producción sectorial va cambiando a sectores con distintas participaciones del capital. Existe evidencia de que las participaciones de los factores no son iguales en todos los países ni tampoco constantes en el tiempo, lo que sería inconsistente con estimar una función Cobb-Douglas. Una manera de obviar este problema sería estimar funciones de producción por sectores, pero obviamente medir los factores de producción sería bastante difícil. La otra opción es simplemente estimar funciones de producción más complicadas.

Por supuesto se puede usar la evidencia existente para tener una estimación razonable. La evidencia indicaría que la participación del capital (trabajo) estaría entre 0,25 y 0,4 (0,75 y 0,6)[8]. Aunque las participaciones en la función de producción sean iguales, hay muchas razones por las cuales ellas pueden diferir al medirlas directamente de las cuentas nacionales. Por ejemplo, esto puede ocurrir porque parte del capital humano, especialmente en el sector informal, está contabilizado en el capital. También puede ser que el supuesto de competencia no se cumpla. Esto puede resultar importante en economías menos desarrolladas, con lo cual se sesgaría el coeficiente del capital hacia arriba porque en el residuo contable (ingreso del capital) no solo estaría el retorno al capital, sino también las rentas monopólicas. Por último, y como ya se mencionó, la composición sectorial de la producción es distinta, y naturalmente esperaríamos que la producción en cada sector sea distinta en términos de su intensidad de uso de factores.

- Productividad (A): usualmente la productividad se calcula como el residuo de la ecuación (13.7), es decir, se tienen todos los valores de la ecuación, α, K y L, Y, y a partir de esto se calcula A. El problema surge en que A va a contener todos los errores de medición de todas las demás variables, es decir, si se calcula mal el nivel de capital, por ejemplo, entonces el valor de A estará mal calculado también. También se puede medir

[8] El estudio más completo sobre participaciones de los factores es Gollin (2002).

con el enfoque dual, (13.12), que requiere menos datos, pero descansa en la medición adecuada de los retornos al trabajo y al capital.

13.3. Contabilidad del crecimiento: La evidencia

El cuadro 13.1 presenta alguna evidencia de Bosworth y Collins (2003) sobre descomposición del crecimiento alrededor del mundo. Los datos están agrupados en las siete regiones más importantes del mundo más China, que se presentan por separado, lo que da un total de 84 países, es decir, el 95 y 85 por ciento del total del PIB y la población, respectivamente, del mundo. Entre paréntesis en cada región se muestra el número de países incluidos[9]. El cuadro está dividido en cinco columnas. La primera (producto) corresponde al crecimiento del producto total del período correspondiente, mientras que la segunda es el crecimiento del PIB por trabajador. La descomposición se realiza respecto del producto por trabajador, por lo tanto, la tercera, cuarta y quinta columna suman la segunda. Es decir, se hizo la descomposición por trabajador, se le aplicó logaritmo natural y luego se restaron para tener una aproximación a los cambios porcentuales. Además, se incorporó el capital humano tal como se vio en la sección 12.1.2.

En general, se observa que hasta antes de la crisis del petróleo en 1974, el crecimiento de la productividad total de los factores fue muy elevado, y se redujo de manera significativa, con excepción de Asia del Este y China, posteriormente. Esto es conocido como el *productivity slowdown*, que se dio con particular fuerza en los países industriales y EE.UU. en especial. Esto ha motivado una serie de estudios que intentan explicar la desaceleración de la productividad después de un rápido crecimiento experimentado posterior a la segunda guerra mundial. Hay varias explicaciones para este fenómeno, entre las cuales cabe destacar:

- Alza del precio del petróleo a principios de los setenta (el primer shock del petróleo). Las economías eran muy dependientes del petróleo; al aumentar el precio, cayó su productividad. En general uno puede pensar que el mayor costo de los insumos es similar a una caída de la productividad. El problema de esta explicación es que después, en los ochenta, el precio del petróleo retrocedió fuertemente, pero no aumentó la productividad total de los factores, por lo tanto, no es una explicación muy satisfactoria. En todo caso, aún así se podría argumentar que el mundo se hizo más independiente del petróleo, y ello generó pocos cambios importantes una vez que el precio se normalizó. Con la importante alza del precio de años recientes y su poco impacto sobre el crecimiento mundial la idea que el mundo es más independiente del petróleo se reafirma. Sin embargo, la

[9] Para más detalles ver Bosworth y Collins (2003).

mayor resistencia de la economía mundial al shock petrolero actual puede ser también el resultado de mejores políticas macroeconómicas.

- Cambio en la composición de la producción. En las décadas de 1950 y 1960, el producto era más intensivo en manufactura y después se tornó más intensivo en servicios. Como los servicios tienen presumiblemente un menor crecimiento de la productividad, la productividad agregada habría crecido más lentamente. Sin embargo, es difícil afirmar con mucha certeza que con los mejoramientos en las tecnologías de información la productividad del sector servicios no haya tenido avances significativos.

- Por último, se puede argumentar que lo excepcional no es la caída de los años 1970 y 1980, sino el enorme crecimiento de la productividad en las décadas de 1950 y 1960. Después de la segunda guerra mundial y como producto de la fuerte inversión en el sector defensa, hubo muchas innovaciones tecnológicas que luego fueron usadas en otros sectores con un fuerte aumento de la productividad. Esta explicación tiene claramente cierto atractivo. Habría que observar qué ocurre durante la década actual, que ha tenido tasas de crecimiento muy importantes, para determinar si estamos viviendo un nuevo período de crecimiento excepcional.

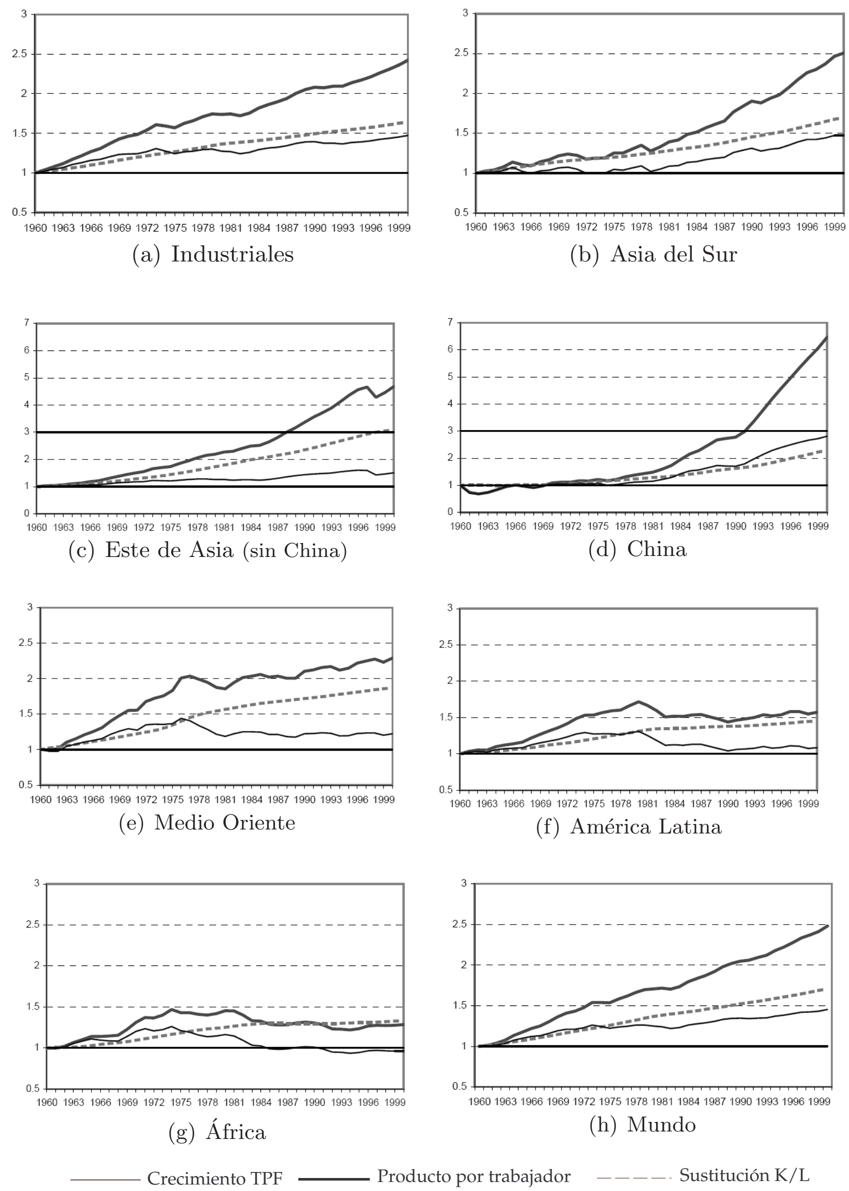
La evolución temporal de la descomposición del crecimiento de Bosworth y Collins se muestra en la figura 13.1. Obsérvese que no ha sido graficado el capital humano ya que como muestra el cuadro 13.1 esta variable es estable en el tiempo. Es importante notar que la contribución de las mejoras en la educación por trabajador explican entre 0,2 y 0,6 puntos porcentuales de crecimiento y son bastante estables en cada región. El rango se reduce a 0,3-0,5 cuando se considera todo el período 1960-2000.

En cada gráfico, la línea segmentada marca la contribución del incremento del capital por trabajador al crecimiento del producto per cápita. La línea delgada muestra la contribución de cambios en la productividad. La multiplicación de los dos índices da igual al producto por trabajador, que se muestra con la línea gruesa. Es importante notar que la contribución del capital es estable a través del tiempo, debido a que la mayoría de las fluctuaciones anuales del ingreso por trabajador se reflejó en la productividad. Considerando el total de países de la muestra, en el período 1960-2000 el crecimiento promedio en el mundo fue de 4 % por año, mientras que el producto por trabajador creció en 2,3 % por año. El incremento en el capital físico por trabajador y la mejora de productividad contribuye cada uno en aproximadamente 1 % por año al crecimiento, mientras el capital humano agrega alrededor de 0,3 % por año. El este de Asia (excluyendo China) tiene un crecimiento regional rápido, con un incremento del producto per cápita de 3,9 % por año en el período 1960-2000, pero la productividad de esos países no creció más rápido que el promedio

Cuadro 13.1: Descomposición del crecimiento (porcentajes)

	Crecimiento de		Contribución de		
Región/Período	PIB	PIB por trabajador	Capital por trab.	Educación por trab.	PTF
Mundo (84)					
1960-70	5,1	3,5	1,2	0,3	1,9
1970-80	3,9	1,9	1,1	0,5	0,3
1980-90	3,5	1,8	0,8	0,3	0,8
1990-2000	3,3	1,9	0,9	0,3	0,8
1960-2000	4,0	2,3	1,0	0,3	0,9
Países industriales (22)					
1960-70	5,2	3,9	1,3	0,3	2,2
1970-80	3,3	1,7	0,9	0,5	0,3
1980-90	2,9	1,8	0,7	0,2	0,9
1990-2000	2,5	1,5	0,8	0,2	0,5
1960-2000	3,5	2,2	0,9	0,3	1,0
Este de Asia menos China (7)					
1960-70	6,4	3,7	1,7	0,4	1,5
1970-80	7,6	4,3	2,7	0,6	0,9
1980-90	7,2	4,4	2,4	0,6	1,3
1990-2000	5,7	3,4	2,3	0,5	0,5
1960-2000	6,7	3,9	2,3	0,5	1,0
China					
1960-70	2,8	0,9	0,0	0,3	0,5
1970-80	5,3	2,8	1,6	0,4	0,7
1980-90	9,2	6,8	2,1	0,4	4,2
1990-2000	10,1	8,8	3,2	0,3	5,6
1960-2000	6,8	4,8	1,7	0,4	2,6
América Latina (22)					
1960-70	5,5	2,8	0,8	0,3	1,6
1970-80	6,0	2,7	1,2	0,3	1,1
1980-90	1,1	-1,8	0,0	0,5	-2,3
1990-2000	3,3	0,9	0,2	0,3	0,4
1960-2000	4,0	1,1	0,6	0,4	0,2
Asia del Sur (4)					
1960-70	4,2	2,2	1,2	0,3	0,7
1970-80	3,0	0,7	0,6	0,3	-0,2
1980-90	5,8	3,7	1,0	0,4	2,2
1990-2000	5,3	2,8	1,2	0,4	1,2
1960-2000	4,6	2,3	1,0	0,3	1,0
África (19)					
1960-70	5,2	2,8	0,7	0,2	1,9
1970-80	3,6	1,0	1,3	0,1	-0,3
1980-90	1,7	-1,1	-0,1	0,4	-1,4
1990-2000	2,3	-0,2	-0,1	0,4	-0,5
1960-2000	3,2	0,6	0,5	0,3	-0,1
Medio Oriente (9)					
1960-70	6,4	4,5	1,5	0,3	2,6
1970-80	4,4	1,9	2,1	0,5	-0,6
1980-90	4,0	1,1	0,6	0,5	0,1
1990-2000	3,6	0,8	0,3	0,5	0,0
1960-2000	4,6	2,1	1,1	0,4	0,5

Fuente: Bosworth y Collins (2003). Se asume $\alpha = 0,65$ y $1 - \alpha = 0,35$.



Fuente: Bosworth y Collins (2003).

Figura 13.1: Descomposición del crecimiento.

mundial. En lugar de eso, el rápido crecimiento de las regiones está asociado en parte con las ganancias en capital humanoy, especialmente, con una elevada acumulación de capital físico. La contribución del incremento del capital físico por trabajador, es superior por más de dos veces al promedio mundial. En contraste, los países industrializados tuvieron un rápido crecimiento de la PTF antes de 1970. África es la región con crecimiento más bajo, con un incremento del PIB por trabajador de solo 0,6 % por año (1960-2000). Para estos países, los incrementos de capital por trabajador contribuyeron solo 0,5 % al crecimiento por año, la mitad del promedio mundial. El modesto incremento en educación antes de 1980 implicó una pequeña contribución del incremento del capital humano. Pero la razón primaria por la que África creció tan lentamente es la evolución de la productividad, la cual declina en cada década desde 1970.

El caso de América Latina es de un crecimiento similar al del mundo entre 1960 y 2000. Sin embargo, esto es en gran parte causado por el rápido crecimiento de Brasil entre 1960 y 1970, ya que las cifras son ponderadas por tamaño, ajustadas por PPP de las economías, y Brasil representa una proporción elevada del producto regional. Por ejemplo, el año 2003 Brasil representaba el 19 % de América Latina[10].

Nótese que conociendo el crecimiento de la productividad total de los factores, podemos predecir el crecimiento de largo plazo de una economía usando el hecho que, con crecimiento de la productividad, el PIB crecería a $n+x/\alpha$. Si el crecimiento de la productividad total de los factores es 1 %, como ha sido el promedio mundial y el de los países industrializados, α es 0,6, y el crecimiento de la población es 1,5 %, la economía podría crecer a 3,2 %. Sin embargo, note que esto es crecimiento de largo plazo. Si consideramos que las economías en desarrollo están en la transición, deberíamos agregar un término de convergencia, y eso permitiría crecer más rápido con un crecimiento de la productividad menor. Sin embargo, también es posible que haya países que están en un nivel de PIB cercano al de largo plazo, aunque este sea bajo, y por lo tanto para estimular el crecimiento hay que pensar en cómo aumentar el PIB de largo plazo.

Una aplicación interesante ha sido la discusión del milagro de Asia (precrisis por supuesto). La discusión ha sido acerca de si el crecimiento de los países del este asiático, es producto de un aumento de la productividad o un aumento del capital y trabajo. Es decir, de acuerdo con la ecuación (13.7), qué variable al lado derecho contribuye en mayor medida a explicar el crecimiento del producto. Esto tiene grandes implicancias, ya que crecer con mayor inversión y ahorro no es lo mismo que crecer con más productividad. El primero puede ser ineficiente (recuerde la regla dorada de excesivo ahorro), o al

[10]En la base de datos de la web del Banco Mundial, en el *World Development Report* hay un conjunto de datos sobre tamaños relativos de las economías en el mundo.

menos requiere un esfuerzo en términos de menor consumo. En cambio, mayor productividad permite tener más producto y consumo.

Como revelan los cuadros 13.1 y 13.2, Asia tuvo una expansión de la productividad total de factores no muy distinta de otros países, aunque su crecimiento fue mucho mayor. Esto porque Asia también hizo un importante esfuerzo de inversión y aumento del empleo que la llevó a aumentar significativamente su stock de capital.

Cuadro 13.2: ¿El milagro asiático? crecimiento 1970-1985
(porcentajes)

País	PIB per cápita	PIB por trabajador	PTF
Taiwán	6,2	5,5	1,5
Hong-Kong	5,9	4,7	2,5
Singapur	5,9	4,3	0,1
Corea del Sur	5,7	5,0	1,4
Brasil	4,2	3,7	1,0
Noruega	3,6	2,7	1,7
Italia	3,5	3,7	1,8
España	3,5	3,7	0,6
Israel	3,4	3,2	1,2

Fuente: Young (1994), sobre la base de Penn World Tables Mark V.

Alwyn Young, uno de los importantes precursores de los desarrollos modernos de teoría del crecimiento, analizó cuidadosamente este tema. Sus resultados después fueron popularizados y apoyados fuertemente por Paul Krugman. Young concluía que el crecimiento de los países de Asia en gran parte fue producto de un aumento del capital y de la fuerza de trabajo, pero no tanto de la productividad, como suponían muchos economistas. Es decir, el crecimiento fue producto del esfuerzo y no de la creatividad. Los datos del cuadro 13.2, calculados en Young (1994), son elocuentes. En él se muestra el crecimiento entre 1970 y 1985 para un conjunto de países de rápido crecimiento del PIB per cápita. Es interesante notar que la caída del crecimiento al pasar de "per cápita" a "por trabajador" en promedio es 1,1 punto porcentual, mientras en el resto de los países es solo 0,2. Esto significa que la fuerza de trabajo creció mucho más rápida en Asia, y esto explica parte del mayor crecimiento del PIB per cápita. Más claro es el caso del crecimiento de la PTF, pues a pesar de ser elevado, salvo el caso de Hong-Kong, los otros países de Asia tienen un crecimiento de la PTF similar al de España e Italia. El caso más interesante es el de Singapur, que prácticamente no tuvo crecimiento de la productividad. ¿De dónde viene entonces el resto del crecimiento de Asia? De la acumulación de capital. Los grandes esfuerzos de ahorro explican la diferencia entre el crecimiento de la PTF y del PIB per cápita[11]. El caso extremo es de nuevo

[11] El lector puede calcular cuál fue el crecimiento del capital si conoce su participación en el producto (1-α). Suponga que esta es 0,4 y calcule el aumento del capital.

Singapur, que aumentó su tasa de ahorro de niveles cercanos al 20 % a niveles cerca del 40 %. El crecimiento de Singapur casi en su totalidad se puede explicar por un aumento del capital y de la fuerza de trabajo, mientras que la productividad contribuye muy poco. Esto sería evidencia de que Asia no es tan milagroso después de todo, y así su crecimiento habría sido el resultado de transpiración más que de inspiración. Sin embargo, ha habido otros estudios posteriores que, basados principalmente en discusiones metodológicas sobre cómo medir la productividad, suavizan estas conclusiones mostrando que Asia ha tenido un crecimiento de la productividad alto, aunque claramente su mayor ahorro e inversión fue clave y, de ver los datos globales, seguramente más importante que las ganancias de productividad[12].

13.4. Descomposición en niveles

Hasta ahora hemos estudiado las fuentes de crecimiento comparando cómo han crecido los factores de producción y la productividad a través del tiempo. Otra aplicación de este tipo de metodologías es comparar países en un mismo instante. Por ejemplo, se puede analizar qué explica que un país sea más pobre que otro. ¿Es la productividad o la menor dotación de factores? Esto normalmente se hace comparando a los países del mundo con algún país base, por ejemplo los países industrializados, o Estados Unidos. Esto puede resultar más ilustrativo para determinar qué hace que algunos países estén muy rezagados, que mirar a las fuentes de crecimiento.

El modelo de Solow dice que en estado estacionario el producto crecerá a la tasa de crecimiento de la población más la tasa de crecimiento de la productividad del trabajo (x/α). Además concluimos que los países más pobres deberían crecer más rápidamente que los más ricos. Sin embargo, este hecho implicaría que todos los países tenderían a tener el mismo nivel de capital y producto por trabajador en estado estacionario, lo cual no ocurre en la realidad. Como se mencionó anteriormente, este hecho sólo se da con países de similares características, es decir, países que tendrían estados estacionarios parecidos y por ende deberían converger sus niveles de ingreso.

Por lo tanto, podemos analizar la brecha del producto respecto de un país base, y ver qué factores explican esta brecha. Para ello se descompone la brecha de producto en brecha de productividad y brecha en la dotación de factores.

13.4.1. Aspectos analíticos

Para ver cómo han evolucionado las brechas entre un país cualquiera y el país tipo, se realiza un ejercicio similar al propuesto hace algunos años por

[12] Hsieh (2002) calcula la PTF usando el enfoque dual y llega a medidas más elevadas. En todo caso, el debate continúa.

Klenow y Rodríguez-Clare (1997) y Hall y Jones (1999), pero por un período mayor y más reciente. Considere la siguiente función de producción:

$$Y = AK^{1-\alpha}H^{\alpha} \tag{13.16}$$

Esta es la misma función de producción usada en estos capítulos donde se usa capital humano (H) en lugar de empleo. Se supone que el capital humano es homogéneo dentro del país; esto es, todas las unidades de trabajo poseen los mismos años de estudio. El aporte del capital humano es medido según la siguiente función:

$$H = e^{\phi(E)}L \tag{13.17}$$

En esta especificación, la función $\phi(E)$ refleja la eficiencia de una unidad de trabajo con E años de escolaridad relativa a una sin escolaridad. Consistentemente con la idea de rendimientos decrecientes, se considera que $\phi' > 0$ y $\phi'' < 0$. La derivada de la función corresponde al retorno de la educación estimado en una regresión de salarios de Mincer (1974). Por simplicidad, se supone que la función $\phi(E)$ es lineal por tramos de educación y se escalan los retornos según la cantidad promedio de años de educación. Para estos retornos se usan los sugeridos por Hall y Jones (1999). Esto es, para los primeros cuatro años de educación la tasas de retorno asumida es 13,4 %, correspondiente al retorno de África. Para los siguientes cuatro años se asume una tasa de retorno de 10,1 %, promedio del mundo como conjunto. Finalmente, para la educación sobre los ocho años se usa el retorno de la educación de los países de la OECD, 6,8 %. Es conveniente ahora expresar la ecuación en términos por trabajador:

$$y = A\left(\frac{K}{L}\right)^{(1-\alpha)} h^{\alpha} \tag{13.18}$$

Sin embargo, esta descomposición no nos sirve para separar adecuadamente capital de productividad, ya que la productividad afecta la razón capital por trabajador. Si hay un aumento de la productividad, el modelo de Solow predice que K/L también crecerá, aunque la tasa de inversión permanezca constante. No obstante, no ocurre así con el coeficiente capital producto, que depende de la tasa de inversión (ahorro) y no de la productividad en estado estacionario. Para ver esto, podemos simplemente apelar al modelo neoclásico con crecimiento de la productividad visto en la sección 11.3. En estado estacionario, considerando la función de producción $y = Ak^{1-\alpha}$, el capital de estado estacionario por unidad de eficiencia está dado por:

$$\tilde{k} = \left[\frac{sA}{\delta + n + \frac{x}{n}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Dado que $\tilde{k} = ke^{(x/\alpha)t}$, tendremos que la relación capital-producto está dada por:

$$k = \left[\frac{sA}{\delta + n + \frac{x}{n}}\right]^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{x}{n}t} \tag{13.19}$$

En consecuencia, cuando A sube, la razón capital-empleo también sube. Sin embargo, la razón capital-producto no cambia, ya que está dada por (ecuación (11.16)):

$$\frac{K}{Y} = \frac{s}{\delta + \gamma} = \frac{s}{\delta + n + \frac{x}{\alpha}} \tag{13.20}$$

Esta expresión es independiente del valor de A y de su tasa de crecimiento.

Por lo tanto, parte de los incrementos del producto que se deben fundamentalmente a incrementos de productividad podrían ser atribuidos a una acumulación de capital si usáramos el capital por trabajador. Entonces, quisiéramos reemplazar K/L por K/Y. Para ello, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{K}{L} &= \frac{K}{Y}\frac{AK^{1-\alpha}H^{\alpha}}{L} \\ &= \left(\frac{K}{Y}\right)^{1/\alpha} \times A^{1/\alpha}h \end{aligned} \tag{13.21}$$

Reemplazando (13.21) en (13.18), llegamos a:

$$y = (K/Y)^{(1-\alpha)/\alpha}A^{1/\alpha}h \tag{13.22}$$

Tomando esta ecuación, y dividiendo y en un país dado con el del país base, y lo mismo para los tres términos del lado derecho, se puede descomponer la brecha en el producto por trabajador, en brechas en la razón capital-producto, brecha educacional, y brecha de productividad. Es decir, tomando como base los Estados Unidos (usando el subíndice US) y comparándolo con un país j tendremos que:

$$\frac{y_j}{y_{US}} = \underbrace{\frac{(K/Y)_j^{(1-\alpha)/\alpha}}{(K/Y)_{US}^{(1-\alpha)/\alpha}}}_{\text{Razón K/Y}} \times \underbrace{\frac{h_j}{h_{US}}}_{\text{Educación}} \times \underbrace{\frac{A_j^{1/\alpha}}{A_{US}^{1/\alpha}}}_{\text{Productividad}} \tag{13.23}$$

Por lo tanto, la diferencia de producto per cápita entre un país j y los Estados Unidos puede descomponerse en tres factores: la brecha en la razón capital-producto, la brecha educacional y la brecha de productividad.

Usando los datos de producto, de número de trabajadores y su promedio de escolaridad, y capital físico entre 1960 y 2000, podemos descomponer las diferencias de producto por trabajador, tal como se expresa en la función

(13.23). Los datos de producto, inversión, trabajadores fueron obtenidos de las *Penn World Tables* 6.1, mientras que los datos de promedio de años de educación fueron tomados de Barro y Lee (2001) y corresponden a la población con una edad de 25 años o más. El capital físico es construido usando el método de inventarios perpetuos[13]. Finalmente, se usa una depreciación igual a 6 % y se asume $\alpha = 0,6$, que es la medida usada comúnmente en la literatura de contabilidad de crecimiento.

13.4.2. Resultados

La figura 13.2 muestra los niveles de productividad total de factores y producto por trabajador para cada país de la muestra en el año 2000.

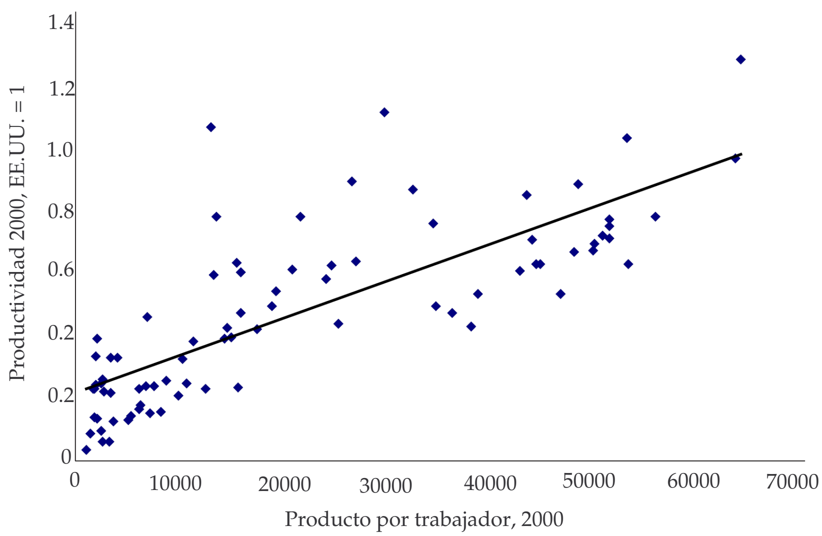


Figura 13.2: Correlación entre productividad y PIB por trabajador.

La correlación entre estas dos series es 0,79. Esto es una primera prueba de lo importante que son las diferencias en la productividad total de factores para explicar las diferencias en el producto por trabajador. Los países con más alto nivel de productividad son España, Francia, Italia, Mauricio y Barbados. Los países con menor productividad son: Tanzania, Zambia, Kenia, República del Congo, Zimbabwe y Togo. En el ámbito regional, África presenta la peor productividad, mientras que Europa muestra los mejores índices. Por otra parte, de un listado de 80 países, 76 presentaron productividades más bajas que Estados Unidos. Un hecho que cabe destacar es que países como Guatemala, Trinidad y Tobago y Barbados poseen un altísimo índice de productividad,

[13] El método es el mismo que se vio en la sección 13.2 de inventarios perpetuos, donde el capital inicial es calculado como si éste estuviera en estado estacionario.

pero un bajo nivel de producto por trabajador, mientras que países como Hong Kong y Bélgica, que superan por más de tres veces el producto por trabajador del primer conjunto de países, observan menores productividades que estos. La razón fundamental para explicar este hecho es que el capital físico y humano, que exhiben países que presentan alta productividad y bajo PIB por trabajador, es muy bajo comparado con el resto de la muestra.

A continuación se presenta la descomposición del PIB per cápita relativo a Estados Unidos. El cuadro 13.3 muestra los promedios regionales, tanto del crecimiento del PIB por trabajador como de sus fuentes con respecto a Estados Unidos, cada 5 años entre el período, 1970 a 2000. Este está dividido en cinco regiones, para las cuales se analizan el crecimiento del producto por trabajador y sus fuentes de crecimiento y está basado en la ecuación (13.23). La primera columna (Y/L) corresponde a la razón del promedio del producto por trabajador que observa una región en un año dado (valor de la columna izquierda) con respecto a Estados Unidos, si el valor de la columna es 0,3 implica que el producto por trabajador de esa región durante ese año es el 30 % del que tenía Estados Unidos. Esta explicación es válida para el resto de las columnas (razón capital-producto, educación y productividad total de factores) las cuales corresponden a las fuentes de crecimiento y que son las brechas derivadas en la ecuación (13.23). Por lo tanto, los valores de estas columnas corresponden a la cantidad de capital-producto, capital humano y productividad de una región en un año en particular, relativos al que tenía ese mismo año Estados Unidos. La multiplicación de estas variables debe ser aproximadamente igual al producto por trabajador[14].

De la tabla 13.3 se desprenden varios hechos; no es de sorprender que los países industriales son los que poseen los valores más altos de producto por trabajador relativo a Estados Unidos. Esta razón parece invariable durante varios años. El resto de regiones sigue muy por debajo, incluso las economías del este de Asia, las cuales aún observan una razón casi tres veces menor que los países industriales. Es importante notar que en esta categoría está incluida China, cuyo PIB per cápita es muy rezagado, aproximadamente el 13 % del de Estados Unidos en el año 2003. El peor desempeño es el de África Sub-Sahara, cuyos índices son los más bajos, incluso han caído con el tiempo aumentando más la brecha con respecto a Estados Unidos. Sobre la razón capital producto, nuevamente vemos a los países industriales con los ratios más altos superiores a 1, lo que implica que estos países tienen más capital por unidad de producto que Estados Unidos. En este mismo factor, los países del este de Asia presentan los segundos mejores índices, llegando en las últimas décadas a casi igualar la razón de Estados Unidos. Esto nuevamente nos recuerda la evidencia de Young en el sentido de que sus altas tasas de ahorro los han llevado a

[14] A veces la aproximación no es muy buena, porque el cálculo fue hecho país a país. Lo que se muestra acá es solo un promedio de los países que conforman una región.

Cuadro 13.3: Diferencias de ingreso respecto a Estados Unidos

		Brecha de		
Período	Y/L	Razón K/Y	Educación	Productividad
África Sub-Sahara (19)				
1970	0,099	0,744	0,341	0,437
1975	0,107	0,740	0,347	0,467
1980	0,102	0,728	0,329	0,466
1985	0,097	0,678	0,369	0,406
1990	0,083	0,629	0,396	0,322
1995	0,082	0,602	0,418	0,315
2000	0,080	0,548	0,423	0,336
América Latina (21)				
1970	0,311	0,856	0,423	0,873
1975	0,318	0,815	0,463	0,842
1980	0,310	0,815	0,490	0,729
1985	0,255	0,824	0,522	0,558
1990	0,223	0,790	0,559	0,462
1995	0,222	0,744	0,576	0,462
2000	0,212	0,728	0,581	0,430
Norte de África y Medio Oriente (9)				
1970	0,316	0,869	0,454	0,966
1975	0,367	0,851	0,633	0,701
1980	0,349	0,948	0,482	0,832
1985	0,348	0,913	0,509	0,790
1990	0,329	0,892	0,642	0,575
1995	0,367	0,851	0,709	0,625
2000	0,298	0,803	0,716	0,556
Países industriales (20)				
1970	0,741	1,341	0,769	0,737
1975	0,791	1,321	0,799	0,781
1980	0,778	1,283	0,814	0,781
1985	0,746	1,243	0,824	0,754
1990	0,748	1,204	0,876	0,730
1995	0,746	1,186	0,903	0,718
2000	0,744	1,137	0,907	0,746
Este de Asia (8)				
1970	0,173	0,842	0,567	0,419
1975	0,208	0,889	0,621	0,379
1980	0,242	0,927	0,616	0,417
1985	0,254	0,980	0,686	0,362
1990	0,301	0,941	0,696	0,439
1995	0,367	0,968	0,734	0,484
2000	0,260	0,960	0,768	0,339

Fuente: Cálculos realizados por el autor. Promedios simples por país, número de países entre paréntesis.

tener elevados niveles de capital, y aún tienen una gran brecha de productividad. Otra vez encontramos que África Sub-Sahara muestra los índices más bajos, e igual que en el caso anterior, la brecha de capital respecto de Estados Unidos se va ampliando. En cuanto a educación, el promedio que exhiben los países industriales es el más cercano al de Estados Unidos. Los países del Este de Asia, junto con los del norte de África y Medio Oriente, presentan índices de educación similares, pero muy lejanos de los países industriales. En lo que respecta a los promedios de la educación, las regiones de África Sub-Sahara y América Latina presentan los peores índices, muy por debajo de países industriales y economías del este de Asia. Sí se puede destacar que en ambas regiones el factor educacional ha ido evolucionando positivamente.

Es interesante notar que los países industriales tienen en promedio una razón capital-producto mayor que la de Estados Unidos, pero este último tiene más productividad, lo que hace que su producto por trabajador sea mayor, a pesar de un menor capital relativo al producto. Algo similar se observa con el este de Asia, que ha tenido un importante avance en su razón capital-producto, manteniendo una brecha significativa en la relación Y/L.

Este ejercicio ilustra claramente que la brecha que explica en mayor medida el diferencial de ingresos en el mundo es la productividad. Es decir, lo que los países necesitan para aumentar su ingreso es incrementar su productividad: producir más con la misma cantidad de factores. Por supuesto, la pregunta es qué hacer para aumentar la productividad, y a eso nos referiremos más adelante.

13.4.3. Evolución de las brechas de productividad

En la sección anterior se enfatizó la comparación de ingresos en un mismo momento del tiempo. Sin embargo, también podemos ver cómo evolucionan las brechas de ingreso y sus distintos componentes. Esto es similar a la descomposición del crecimiento de la sección 13.3, pero siguiendo la evolución de la brecha en lugar del PIB.

El cuadro 13.4, al igual que el anterior está dividido en cinco regiones y cuatro columnas. Las columnas están basadas en la ecuación (13.23) y se presentan en el mismo orden que en el cuadro anterior, es decir, la columna 1 corresponde a la evolución del producto por trabajador respecto a Estados Unidos, la segunda columna corresponde a la evolución de la razón capital-producto, la tercera a la evolución del capital humano, y la cuarta a la evolución de la productividad total de factores. A diferencia del cuadro anterior, este muestra el crecimiento de las variables, durante todo el período 1970-2000. La interpretación de los valores es cómo han evolucionado las razones de capital-producto, capital humano y productividad entre los años 1970 y 2000. Para estos cálculos se toma la razón que tenía la región en el año 2000 y se compara

Cuadro 13.4: Evolución de las brechas con respecto a Estados Unidos (1970-2000)

	Cambio en brecha	Contribución de		
Período 1970-2000	Y/L	Razón K/Y	Educación	Productividad
África Sub-Sahara	-0,288	-0,143	0,009	-0,033
América Latina	-0,277	-0,112	0,003	-0,168
Norte de África y Medio Oriente	0,033	0,109	0,095	0,049
Países industriales	0,054	-0,038	0,012	0,080
Este de Asia	0,967	0,657	0,054	0,241

Fuente: Cálculos realizados por el autor.

con la razón que tenía en 1970. Por ejemplo, si el producto por trabajador tiene un valor de 0,1, significa que el producto por trabajador que tiene en el año 2000 es 10 % más cercano al de Estados Unidos que el que tenía en 1970. Este cambio es explicado por los factores capital-producto, capital humano y productividad total de factores. Si bien los valores son promedios regionales, la suma de las fuentes de crecimiento debe ser aproximadamente igual a la del producto por trabajador.

El cuadro 13.4 muestra los promedios regionales de las fuentes del crecimiento. Los valores de la primera columna corresponden al aumento porcentual de la razón entre el PIB per cápita de la región con respecto a la de Estados Unidos. Esto corresponde al inverso de la reducción de la brecha. Por ejemplo, la razón del PIB del Este de Asia y el de Estados Unidos aumentó un 96,7 %, lo que es casi una reducción a la mitad de la brecha con Estados Unidos[15]. Este cambio se descompone en la contribución de cada uno de los términos de (13.23) a la reducción, o aumento, de la brecha. La suma de estos tres términos es igual a la primera columna[16].

Respecto al producto por trabajador, la mayoría de las regiones ha presentado irregularidades, aumentando y disminuyendo las diferencias. Destacables son los casos del norte de África y Medio Oriente, ya que siempre han ido acortando sus diferencias en producto por trabajador respecto a Estados Unidos. Sin embargo, durante todo el período de 1970 al 2000 esta región solo acortó su

[15] Los cálculos no son estrictamente comparables a los del cuadro anterior, porque en este se reporta el promedio entre países del cambio de cada región, mientras que el cuadro anterior toma el promedio entre países de la razón entre el PIB del país y el de los Estados Unidos.

[16] Algebraicamente:

$$\frac{d(Y/L)}{Y/L} = \frac{d(K/Y)^{(1-\alpha)/\alpha}}{(K/Y)^{(1-\alpha)/\alpha}} + \frac{dA}{A} + \frac{dh}{h} \tag{13.24}$$

y cuya única diferencia es que los valores ahora están divididos por su homólogo de Estados Unidos.

diferencia en 3,3 %. En cuanto a los países industriales, estos tuvieron un comportamiento irregular con aumentos y disminuciones de las diferencias del PIB por trabajador. Aún así, estos países disminuyeron su diferencia respecto a Estados Unidos durante el período 1970-2000 en 5,4 %. Un caso interesante son los países del Este de Asia, los cuales mostraron un patrón positivo durante casi todo el período, excepto entre 1995 y 2000 (período en el que ocurrió la crisis asiática). Al contrario de la región del Norte de África y Medio Oriente, los países del Este de Asia acortaron su diferencia en producto por trabajador más que cualquier región del mundo, llegando a un aumento en su razón respecto de los EE.UU. en un 96,7 %. Finalmente, las regiones con peor desempeño han sido África Sub-Sahara y América Latina, las cuales aumentaron su diferencia con Estados Unidos en 28 %.

Respecto a la razón capital-producto, las diferencias se incrementaron durante el período para las regiones de América Latina, África Sub-Sahara y países industriales; mientras que las regiones de este de Asia y norte de África y Medio Oriente redujeron sus diferencias. Notable resulta el caso de las economías del este de Asia en las cuales dos tercios del acortamiento de la brecha con Estados Unidos se debió a un aumento en la razón capital-producto.

En educación la brecha a nivel mundial se acortó, porque durante el período 1970-2000 todas las regiones presentaron índices finales positivos. La mayor disminución la presentó la región del norte de África y Medio Oriente, con una reducción de casi 10 %; mientras que la menor reducción de la brecha la tuvo América Latina.

Respecto de la productividad, las regiones que presentaron disminución en las diferencia respecto a Estados Unidos fueron este de Asia, países industriales y norte de África y Medio Oriente; por el contrario, las regiones que presentaron aumentos en su brecha fueron América Latina y África Sub-Sahara. Nuevamente la región del Este de Asia fue el punto alto, al exhibir la mayor disminución en la brecha en alrededor de 24 %; por el contrario, América Latina aparece con el peor desempeño, aumentando su brecha en 17 %.

La región que aparece con un mejor crecimiento y reducción de brechas es este de Asia. Esto se puede descomponer en una gran alza del la razón capital-producto, es decir, la mayor fuente de crecimiento de estos países vino dada por la fuerte acumulación de capital. En todo caso también fue importante el crecimiento de la productividad respecto a Estados Unidos y, en menor medida, del capital humano. En general, el desempeño de los países de esa región fue el mejor. Por lo tanto, a pesar de que la evidencia indica que el crecimiento de Asia se debió en primer lugar a su gran esfuerzo de ahorro e inversión, no podemos depreciar la contribución que hizo el aumento de la productividad.

En lo que respecta a los países industriales y norte de África y Medio Oriente, si bien redujeron sus brechas con respecto a Estados Unidos, lo hicieron en una proporción muy pequeña comparada con el Este de Asia. El factor que más contribuyó a disminuir la brecha en países industrializados fue la educación, y en menor cantidad la productividad; en cambio la acumulación de capital fue en lo que peor se desempeñaron, lo que aumentó la brecha. Esto puede deberse a que estos países ya tenían más nivel de capital-producto que Estados Unidos y su tendencia es a la convergencia. Para la región del norte de África y Medio Oriente, el bajo crecimiento contrasta con una disminución en las brechas respecto a Estados Unidos de todos los factores. América Latina presenta uno de los peores desempeños, junto con África; las bajas tasas de crecimiento han incrementado las brechas con Estados Unidos. Los principales factores que parecen contribuir a la ampliación de las brechas son el capital-producto y la productividad. Este último factor constituye, sin duda, una de las principales causas del estancamiento que sufre la zona. Caso similar es el de África Sub-Sahara, región que presenta el peor desempeño del mundo en crecimiento.

13.5. Convergencia

Nosotros mostramos en el capítulo 10 que en el mundo no hay convergencia, pero se observa algún grado de convergencia entre economías similares. Esto indicaría que las economías similares convergen al mismo estado estacionario, de modo que cuando graficamos su tasa de crecimiento con respecto a su nivel de ingreso inicial deberíamos observar una relación negativa. Estos países exhibirían convergencia incondicional. Este tipo de convergencia se observa también entre los estados de Estados Unidos, las prefecturas de Japón, las regiones de Italia, etc., incluso en países en desarrollo. No es sorprendente, pues es más fácil pensar que, al interior de un país, la movilidad de factores y las condiciones económicas comunes generales los hacen tener el mismo producto de estado estacionario.

No obstante, en el mundo no observamos convergencia (figura 10.2). Esto indicaría que los países convergen a distintos estados estacionarios, por lo tanto un gráfico correcto sería el de tasa de crecimiento respecto del nivel de ingreso con relación a su estado estacionario, y no simplemente respecto de su nivel de ingreso. Para tener alguna noción del estado estacionario (y^*) se deberían buscar variables —por ejemplo la tasa de ahorro—, que nos permitan predecir y^* y con eso ver si hay convergencia. En otras palabras, podríamos intentar estimar empíricamente el valor de β en la siguiente relación:

$$\gamma_i = \log y_{i,t} - \log y_{i,t-1} = -\beta(\log y_{i,t} - \log y_i^*) \tag{13.25}$$

Donde el subíndice i representa un país, y esa relación la estimaríamos para un gran número de países o regiones. Si los y^* son los mismos, bastaría mirar las diferencias en crecimiento; si sólo hay convergencia condicional, habría que tratar de controlar por elementos que nos permitan aproximarnos a y^*, cosa que veremos más adelante.

¿Qué dice la evidencia respecto de la convergencia? Tanto la evidencia de convergencia incondicional, que se observa en regiones específicas del mundo o al interior de países, como la convergencia condicional, que se observa para el mundo en su conjunto, muestra que efectivamente las economías que se encuentran más lejos de su estado estacionario crecen más rápido. El parámetro β ("velocidad de convergencia") es positivo, es decir, los pobres crecen más rápido. Más aún, la evidencia indica que la velocidad de convergencia es entre 0,015 y 0,030. Esto implica que la mitad del recorrido hacia la convergencia se cubre en un lapso de unos 23 a 46 años[17].

Esto es exactamente lo que predice el modelo neoclásico, lo que es sin duda un buen test. Pero podríamos ir más lejos y preguntarnos la predicción cuantitativa del modelo por la vía de una calibración sencilla. Aquí no iremos sobre el álgebra, pero veamos la figura 13.3, que muestra la convergencia cuando la función de producción es $f(k) = k^{1-\alpha}$. La curva decreciente es $sf(k)/k = sk^{-\alpha}$. La curva más empinada representará una velocidad de convergencia mayor, ya que para un mismo capital inicial, la economía representada en la curva más empinada (que tiene α alto y $1-\alpha$ bajo) convergerá más rápido. En el extremo donde la participación del capital es 1 ($1 - \alpha = 1$), tenemos el caso AK y no hay convergencia.

Se puede demostrar que la velocidad de convergencia en el modelo neoclásico con crecimiento de la productividad es $\alpha(n + \delta + x/\alpha)$, y podemos recurrir a los datos para estimar esta velocidad. Los valores de α, participación del trabajo, fluctúan, como ya discutimos, entre 0,6 y 0,75, con el valor más bajo probablemente en los países en desarrollo. La población crece entre un 1 y 2 % por año y la depreciación es alrededor de 5 a 8 %, mientras x toma valores entre 1 y 2 %. Con esto, la velocidad de convergencia predicha es del orden de 0,04 a 0,09, lo que implica que el tiempo predicho por el modelo más simple es entre 17 y 8 años, mucho más rápido de lo que la evidencia empírica indica.

En el fondo, la evidencia nos diría que, si bien el modelo neoclásico está bien, pareciera que la economía es también "cercana a AK". Lo que se necesita para reconciliar la evidencia con la teoría es subir la participación del capital a niveles entre 0,65 y 0,8, y aquí es donde los modelos de crecimiento endógeno nos ayudan. Dichos modelos nos dicen que el capital hay que considerarlo en una versión más ampliada, por ejemplo a través de la incorporación del capi-

[17]Nota técnica: La ecuación (13.25) en términos de tiempo continuo es $d\log y/dt = -\beta(\log y - \log y^*)$, donde log corresponde al logaritmo natural. Esta ecuación tiene por solución $\log y_t = (1 - e^{-\beta t})\log y^* + e^{-\beta t}\log y_0$, dado que en 0 el ingreso es y_0 (condición de borde). Por lo tanto partiendo de y_0 la mitad del ajuste se cubre en T años, donde T está dado por: $\log y_t - \log y_0 = (\log y^* - \log y_0)/2$, o sea $\log y_t = (\log y^* + \log y_0)/2$, lo que requiere que en la solución general a la ecuación diferencial tengamos $e^{-\beta T} = 1/2$, lo que implica que el tiempo para cubrir la mitad del ajuste es $T = \log 2/\beta$.

tal humano; de esta forma la participación de este capital más ampliado (más allá que simplemente máquinas, equipos e infraestructura) sería más consistente con las lentas velocidades de convergencia que se observan en el mundo.

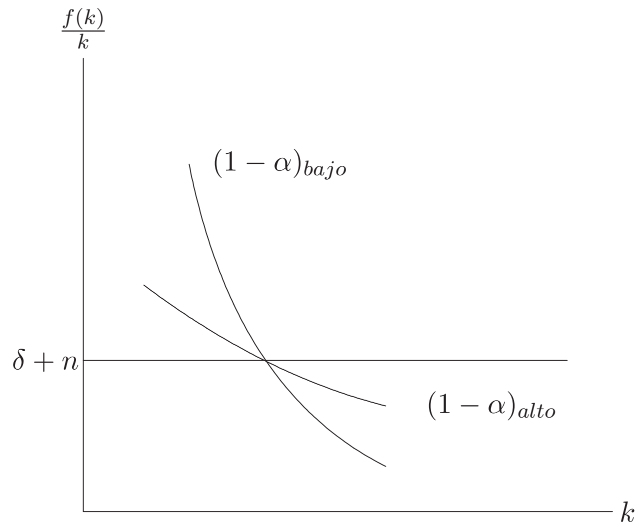


Figura 13.3: Convergencia cuando $y = k^{1-\alpha}$

13.6. Determinantes del crecimiento

Un aspecto que no hemos discutido es que el crecimiento de las economías en estado estacionario es igual al crecimiento de la productividad. En consecuencia, uno quisiera saber qué determina el crecimiento de la productividad: ¿es algo exógeno, o las políticas o características de un país afectan el crecimiento de la productividad? Asimismo, cuando consideramos la convergencia al estado estacionario, y considerando que en el mundo hay muchos países que no están en estado estacionario, sabemos que países con ingreso de equilibrio mayor crecerán más rápido. Más aún, sabemos que el PIB de largo plazo depende de la tasa de ahorro, el crecimiento de la productividad, la depreciación (que probablemente es la misma entre países, o al menos no sabemos cómo se diferencian) y el crecimiento de la población. Si pensamos que la tasa de ahorro y el crecimiento de la productividad dependen de características importantes de la economía, podríamos tratar de encontrar la siguiente relación para el crecimiento del PIB de un país i (γ_i):

$$\gamma_i = f(Z_i) - \beta \log y_{i,0} \tag{13.26}$$

Donde $f(Z_i)$ es una función de variables Z que representan dichas características del país i, y el término $-\beta \log y_{i,0}$ mide la convergencia.

Entonces, nos interesaría saber cuáles son los Z y poder explicar qué características de los países hacen que algunos crezcan más rápidamente que otros. Esto tiene, entre otras cosas, implicancias muy importantes para política económica, pero también para poder predecir el crecimiento de los países sin necesidad de asumir el crecimiento de la productividad como hicimos cuando revisamos la descomposición del crecimiento.

La literatura es vasta y variada. Hay algunas variables Z que han mostrado ser importantes en muchos estudios, con muchos métodos de estimación, y en diversas muestras de países. Sin embargo, también hay estudios que demuestran que dichas relaciones son débiles.

Aquí mencionaremos algunas de ellas, señalando en paréntesis el signo de la "derivada parcial", es decir, el impacto que tiene sobre el crecimiento un aumento en dicha variable. La discusión es ciertamente controvertida y la lista tiene cierto grado de arbitrariedad basado en la evaluación del autor sobre la literatura. Por lo tanto, hay que tomarlo como indicativo y no como algo completamente comprobado. Las variables que aparecen con más frecuencia y cuyo signo es relativamente robusto son:

- La tasa de inversión (+). Se ha mostrado también que la composición de la inversión es importante, en particular la tasa de inversión en maquinaria y equipo estimula más el crecimiento que el resto de la inversión.

- El nivel de educación de la población (+) y la expectativa de vida (+), ambas como medidas de la calidad de la fuerza de trabajo, es decir, el capital humano.

- Tasa de fertilidad (-), como predice el modelo neoclásico.

- Variables institucionales indicarían que el grado de protección de los derechos de propiedad y el grado de desarrollo institucional estimulan el crecimiento. En general, se observa que bajos niveles de corrupción, de criminalidad, elevado nivel de respeto a las leyes y estabilidad política estimularían el crecimiento.

- Inflación (-). Premio del mercado negro cambiario (-) y algunas otras variables que miden la inestabilidad macroeconómica, como la ocurrencia de crisis cambiarias, indicarían que la estabilidad macroeconómica es buena para el crecimiento. Asimismo se ha mostrado que países con bancos centrales independientes crecerían más rápidamente.

- Consumo final del gobierno (-). Los gastos del gobierno tienen que ser financiados con impuestos, los que introducen distorsiones y reducen el crecimiento. Puede haber efectos encontrados con ítems de gasto que promuevan el crecimiento. Este es el caso de la inversión en infraestructura o gasto en educación que tendrían un componente de aumento de productividad. Asimismo, esta medida no incorpora el gasto en transferencias (no es consumo final) que según alguna evidencia podría tener un efecto positivo.

- Apertura al exterior (+) e inversión extranjera (+). En general se ha encontrado que las economías más abiertas crecen más.

- Términos de intercambio (+). En general se observa que países donde los términos de intercambio mejoran crecen más rápidamente.

- Desarrollo financiero (+). También se ha mostrado que economías que tienen mercados financieros más profundos crecen más, principalmente porque mejoran la eficiencia en la asignación de los fondos de inversión.

- Grado de equidad en la distribución de ingresos (+). Una distribución de ingresos más equitativa estimularía el crecimiento, por cuanto los potenciales conflictos y las demandas por políticas más distorsionadoras serían menores.

- La democracia tiene efectos no lineales, pues por un lado genera paz social e integración, pero por otro puede generar mucha pugna distributiva, lo que puede inducir políticas que retarden el crecimiento.

Es importante advertir que ha habido muchos trabajos analizando y cuestionando la validez de resultados específicos, de manera que la evidencia no se debe tomar como demostración definitiva de la relevancia de algunas variables. No obstante, la evidencia nos muestra efectivamente que hay algunas variables cuya relevancia parece ser menos controvertida.

También hay mucha evidencia de que existen interacciones entre las distintas variables que afectan el crecimiento. Por ejemplo, los efectos positivos de la inversión extranjera se observan en países que tienen elevados niveles de capital humano. Podemos imaginar muchos efectos de interacción, y ciertamente resulta positiva para el crecimiento una combinación de las variables destacadas anteriormente. El estímulo al crecimiento requiere abordar muchas tareas, y sin duda una buena política económica debe ser capaz de priorizar y conocer las restricciones que existen para aplicar buenas políticas. Por ejemplo, es fácil pensar que las privatizaciones son buenas para el crecimiento, por cuanto el Estado no es el más adecuado para producir. Sin embargo, privatizaciones en ambientes de alta corrupción pueden ser negativas por la falta de legitimidad que tienen, y las posibilidades de reversiones traumáticas de estos procesos.

En De Gregorio y Lee (2004) se realiza algunas regresiones que se reporta aquí. En dicho trabajo se estudia los determinantes del crecimiento y analiza qué variables explican mejor las diferencias de crecimiento entre América Latina y economías del este de Asia durante el período 1960-2000. Para ello se estima una ecuación igual a (13.26). La regresión fue estimada con datos de panel para una muestra amplia de países en seis períodos de cinco años cada uno desde 1970 a 2000.

El cuadro 13.5 presenta los determinantes del crecimiento que estudiaron los autores o las variables Z. Las columnas (1), (2), (3) y (4) corresponden a los resultados de las regresiones para las variables cuyos coeficientes aparecen en la tabla. Para cada fila, el número de la parte superior corresponde al valor del coeficiente y el valor en paréntesis corresponde al error estándar[18].

El cuadro 13.5 muestra que existe una fuerte evidencia para la convergencia condicional: el coeficiente en valor logarítmico del PIB inicial en la columna 2 es altamente significativo, y su coeficiente estimado es 0,025. De esta manera, un país pobre con un bajo ingreso inicial crecerá más rápidamente, controlando por las variables que influencian el nivel de ingreso de estado estacionario. Específicamente, el coeficiente implica que un país con la mitad del ingreso crecerá más rápido que un país rico en 1,73 puntos porcentuales. La tasa de inversión y la tasa de fertilidad tienen fuertes efectos en la tasa de crecimiento.

El coeficiente de la tasa de inversión es positivo y significativo, mientras que el coeficiente de la tasa de fertilidad es fuertemente negativo: 0,015. Los resultados de la columna 2 muestran que las variables de capital humano tienen un efecto significativamente positivo en el crecimiento económico. El logaritmo de la expectativa de vida es altamente significativo en la regresión. Se encontró clara evidencia de que la calidad de las instituciones y variables políticas juegan un rol determinante en el crecimiento. El índice de imperio de la ley tiene un fuerte efecto positivo en el crecimiento, lo que indica que los países con leyes más efectivas en la protección de la propiedad y derechos contractuales tienden a tener mayores tasas de crecimiento.

La variable de apertura está positivamente asociada con el crecimiento. Los resultados de la regresión confirman la no linealidad entre democracia y crecimiento, tal como señala Barro (1997a). Los coeficientes del indicador de democracia y sus términos cuadrados son positivos y negativos respectivamente, y ambos estadísticamente significativos. La columna 2 muestra que el efecto de la inflación en el crecimiento de la economía es negativo. Sin embargo, cuando se agrega una variable que indica si durante el quinquenio el país tuvo o no una crisis de balanza de pagos, el coeficiente se hace estadísticamente insignificante. La razón no es que la inflación no importe, sino que es difícil separar ambos efectos por cuanto los países de alta inflación tienden a tener más crisis. La regresión muestra un menor efecto en el crecimiento de los

[18] El error estándar indica con qué precisión está estimado el parámetro. Si este es muy elevado, no podemos asegurar que el parámetro es distinto de 0. Una regla general y simple es que un error estándar razonable es cerca de la mitad del valor del coeficiente.

términos de intercambio.

Otra variable explicativa que se usa es la presencia de crisis de balanza de pagos y se concluye que estas afectan transitoriamente el crecimiento en 1,6 puntos porcentuales por año durante un quinquenio[19]. Las crisis de balanza de pagos tienen un efecto negativo en el crecimiento. El retardo en el crecimiento originado por una crisis de balanza de pagos no persiste más allá de los subsecuentes cinco años. Por ello, los efectos de las crisis de balanza de pagos reducen el ingreso permanentemente, pero estas no tienen efectos permanentes en el crecimiento.

Problemas

13.1. **Salarios y retorno al capital en el modelo de Solow.** En el modelo de Solow el producto Y, depende de capital y el trabajo $Y = F(K, L)$, donde estamos ignorando los incrementos de productividad y la función de producción tiene retornos constantes a escala. En este problema consideramos una economía pobre (es decir, con menos capital que en estado estacionario) y estudiamos cómo evolucionan los precios de los factores (salario y retornos al capital) camino al estado estacionario.

a.) Suponga que el pago al capital r, viene dado por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ y el salario, w, por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$. ¿Bajo qué condiciones es apropiado este supuesto?

b.) Muestre que $r = f'(k)$ y $w = f(k) - kf'(k)$. Aún si no puede responder esta parte, puede usar estos resultados en las partes siguientes.

c.) Muestre que la suma de los pagos a ambos factores es igual al producto, es decir, que $rK + wL = F(K, L)$.

d.) Determine si el pago al capital crece o cae camino al estado estacionario. Haga lo mismo para los salarios.

e.) Suponga que la función de producción es del tipo Cobb-Douglas. Determine la tasa de crecimiento del pago al capital, $\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r}$, y la tasa de crecimiento del salario $\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w}$. Relacione ambas tasas con la tasa de crecimiento del capital.

f.) En una economía, la tasa de retorno al capital durante un año ha sido considerablemente menor que en años anteriores. ¿Es posible explicar este fenómeno a partir de los resultados de este problema?

[19] Para medir esta variable se combinan dos definiciones de crisis de balanza de pagos. Se considera que un país tuvo una crisis de balanza de pagos si experimentó una depreciación de al menos 25 % en cualquier semestre de un año específico y la tasa de depreciación excede a la del semestre anterior por un margen de al menos un 10 %.

Cuadro 13.5: Regresión para tasa de crecimiento per cápita del PIB

	(1)	(2)	(3)	(4)
Log (PIB per cápita)	-0,0236 (0,0036)	-0,0251 (0,0036)	-0,027 (0,0039)	-0,0224 (0,0036)
Inversión/PIB	0,0723 (0,0272)	0,056 (0,0274)	0,0558 (0,027)	0,0497 (0,028)
Log (Tasa de fertilidad)	-0,018 (0,0058)	-0,0151 (0,006)	-0,0153 (0,0064)	-0,0132 (0,006)
Educación universitaria masculina	0,0021 (0,0017)	0,0029 (0,0017)	0,0031 (0,0018)	0,0019 (0,0017)
Log (Expectativa de vida)	0,0546 (0,0209)	0,0653 (0,0214)	0,0614 (0,0237)	0,0661 (0,0225)
Gasto del gobierno/PIB	-0,0723 (0,0272)	-0,0722 (0,0239)	-0,1068 (0,0267)	-0,0646 (0,0238)
Índice respeto a la Ley	0,0178 (0,0074)	0,0179 (0,0075)	0,0184 (0,0084)	0,0161 (0,0075)
Tasa de inflación π	-0,0284 (0,008)	-0,0129 (0,009)	-0,0077 (0,009)	-0,0144 (0,0091)
Índice democracia	0,0556 (0,0183)	0,0599 (0,0188)	0,0562 (0,0212)	0,0555 (0,019)
(Índice democracia)^2	-0,0456 (0,0171)	-0,0472 (0,0175)	-0,0387 (0,0196)	-0,0422 (0,0179)
Índice apertura	0,0072 (0,0045)	0,0086 (0,0046)	0,0112 (0,0049)	0,0038 (0,0046)
Δ % Términos de intercambio	0,0312 (0,0229)	0,0346 (0,0233)	0,0558 (0,027)	0,0307 (0,0234)
Crisis de balanza de pagos t	–	-0,0165 (0,0053)	-0,0168 (0,0058)	-0,0161 (0,0051)
Crisis de balanza de pagos $t-1$	–	–	0,0061 (0,0056)	–
Grupo de 9 del este de Asia	–	–	–	0,0106 (0,0056)
Grupo de 21 países de América Latina	–	–	–	-0,0033 (0,0041)
Nº de países	85	85	85	85
Nº de observaciones	464	464	391	464

Fuente: De Gregorio y Lee (2004).

g.) En esta misma economía los salarios reales vienen creciendo sostenidamente en los últimos años, sin que se note una caída en la tasa de crecimiento. ¿Es consistente con los resultados de este problema? Si su respuesta es afirmativa, justifique cuidadosamente. Si es negativa, discuta cuál aspecto excluido del modelo estudiado en este problema puede explicar la aparente discrepancia.

Capítulo 14

Crecimiento económico con ahorro óptimo*

En los capítulos anteriores hemos analizado el crecimiento asumiendo que la tasa de ahorro es constante e igual a s. Aunque en una primera aproximación esta es una buena idea, tiene también algunas limitaciones. La primera es que el crecimiento al final depende de lo que pase con el crecimiento de la productividad y otros factores, todo lo cual debiera incidir en la tasa de ahorro. Solo podemos especular acerca de cómo cambia la tasa de ahorro sin mayores fundamentos. Y en segundo lugar, desde el punto de vista de tener una buena teoría de crecimiento que nos permita analizar el bienestar, se debe tener un modelo bien especificado, que incluya la utilidad de los hogares.

Por lo anterior, en este capítulo se presenta el modelo de Ramsey, que es similar al modelo de Solow, pero con individuos que deciden óptimamente su trayectoria de consumo. Frank Ramsey fue un matemático inglés nacido en 1903 que murió poco antes de cumplir veintisiete años. Sus contribuciones a la economía fueron fundamentales: debe ser uno de los economistas más influyentes del siglo XX. En su corta existencia, no solo desarrolló el modelo de los consumidores dinámicamente optimizadores, en 1928, sino que además desarrolló, en 1927, lo que hoy se conoce como *Ramsey taxation*, por sus resultados sobre cómo fijar los impuestos para maximizar la eficiencia. En la década de 1920, Ramsey, criticando el trabajo sobre probabilidades de un colega en Cambridge, nada menos que J. M. Keynes, anticipó lo que después sería el análisis de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern. También hizo importantes contribuciones, las que hasta hoy se estudian en matemáticas, lógica y filosofía.

El modelo de Ramsey se concentró en cuál era el ahorro óptimo de los individuos, y en la década de 1960 fue incorporado en modelos de crecimiento por T. Koopmans, quien ganó el premio Nobel, y por D. Cass, haciendo uso de las matemáticas de control óptimo, que es lo que usamos aquí. Por ello, al modelo de Ramsey se le llama también el *modelo de Ramsey, Cass y Koopmans*.

Este capítulo comienza presentando el modelo de Ramsey, para luego extenderlo a crecimiento endógeno y a una economía abierta. El modelo de Ramsey es considerado como uno de los modelos básicos de macroeconomía dinámica. Es una extensión natural del modelo de dos períodos discutido en capítulos anteriores, y permite analizar fenómenos de más largo plazo que lo que se puede hacer con dos períodos. El otro modelo dinámico básico es el de generaciones traslapadas, que no se discutirá aquí, pero básicamente son modelos —de dos períodos, por ejemplo— donde en cada período van entrando nuevas generaciones. Estos modelos también permiten analizar la economía en el largo plazo, la dinámica del crecimiento y la acumulación de capital.

Lo que aquí nos interesa es incorporar la forma en que óptimamente los hogares toman sus decisiones de ahorro en un modelo de horizonte infinito. Por lo tanto podremos estudiar cómo se comportan el ahorro, el consumo, la inversión y el producto, y cómo pueden ser afectados por la política económica.

14.1. El modelo de Ramsey: Comportamiento de hogares y empresas

Esta economía está compuesta por hogares y firmas; más adelante incluiremos al gobierno. Los hogares trabajan por un salario dado, su oferta de trabajo está fija y reciben intereses por sus ahorros. Se analizará primero las decisiones que toman los hogares, después las decisiones de las firmas, y finalmente el equilibrio.

Hogares

Consideraremos que los individuos viven infinitamente[1]. La unidad básica es una familia, y por simplicidad asumiremos que hay una familia, o un número fijo más en general. El número de individuos en la familia crece a una tasa n. Es decir, la población y la fuerza de trabajo crecen a una tasa n: $N_t = N_0 e^{nt}$.

Los hogares, en t=0, resuelven el siguiente problema[2]:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} U = \int_0^{\infty} N_t u(c_t) e^{-\rho t} dt \tag{14.1}$$

Donde $u(c_t)$ representa la utilidad de un individuo en el tiempo t. Esta función de utilidad es creciente y cóncava, es decir, $u' > 0$ y $u'' < 0$. Esto significa que el individuo prefiere el promedio de las utilidades y, por lo tanto, va

[1] En realidad es como si un individuo se preocupara de sus hijos, nietos, etcétera.

[2] Para mayores detalles se puede consultar los libros de Blanchard y Fischer (1989) o Barro y Sala-i-Martin (2003), cap. 2 en ambos casos. Aquí se sigue la especificación de Barro y Sala-i-Martin (2003) al considerar N en la función de utilidad lo que resulta en un factor de descuento $\rho - n$ para la utilidad per cápita.

a tratar de suavizar su consumo. Además, $u(c_t)$ cumple las condiciones de Inada, esto es $\lim_{c_t \to 0} u'(c_t) = \infty$, $\lim_{c_t \to \infty} u'(c_t) = 0$. Finalmente, ρ representa la tasa de descuento de la utilidad de cada individuo. En consecuencia, la función objetivo corresponde a la utilidad agregada del consumo familiar, donde cada individuo recibe u de utilidad y hay N individuos por hogar. Normalizando $N_0 = 1$, tenemos que el objetivo de la familia es:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} U = \int_0^{\infty} u(c_t) e^{-(\rho-n)t} dt \tag{14.2}$$

Cada persona provee una unidad de trabajo(sevicio laboral), a cambio de lo cual recibe un salario w. Llamaremos r_t a la tasa de interés real de mercado. Seguiremos usando la notación $\dot{X}_t$ para representar la derivada de cualquier variable X respecto de t, es decir dX_t/dt. Por lo tanto, la restricción presupuestaria que enfrentan las familias en cada período es:

$$w_t N_t + r_t A_t = C_t + \dot{A}_t \tag{14.3}$$

Donde A_t son los activos que posee la familia en el instante t y $\dot{A}_t$ representa la acumulación-desacumulación (ahorro-desahorro) que la familia realizó durante el período t.

Dividiendo por N_t, el número de individuos-trabajadores de la economía, y después de un poco de álgebra se llega a la siguiente restricción per cápita[3]:

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - n a_t - c_t \tag{14.4}$$

La intuición detrás de la restricción es que el ahorro/desahorro del individuo es igual a su salario, w, más los intereses de sus ahorros, ra, menos los activos que debe acumular para mantener el nivel de activos per cápita, menos el consumo.

Otra de las condiciones que tenemos que imponer a este problema, antes de encontrar la solución, es que las familias no pueden terminar con deuda en el infinito. Esto ya fue discutido en los capítulos de la parte II, cuando vimos las restricciones presupuestarias intertemporales de hogares y gobierno. Esta es la conocida condición de juego no-Ponzi. Formalmente significa que (expresado en tiempo continuo):

$$\lim_{t \to \infty} A_t e^{-rt} \geq 0 \tag{14.5}$$

Como no es racional dejar activos positivos al final del horizonte, esta restricción se cumplirá con una igualdad.

Por lo tanto, las familias resuelven el problema de maximizar la utilidad del consumo del individuo representativo, (14.2), sujeto a (14.4) y (14.5). La

[3]Esto viene del hecho, ya usado antes en el modelo del Solow, de que si $x = X/N$, tenemos que $\dot{x} = \dot{X}/N - X\dot{N}/N^2 = \dot{X}/N - xn$.

solución a este problema se obtiene usando el principio del máximo de optimización dinámica para lo cual escribimos el hamiltoniano en valor presente asociado a este problema[4]:

$$\mathcal{H} = [u(c_t) + \lambda_t(w_t + (r_t - n)a_t - c_t)]e^{-(\rho-n)t} \tag{14.6}$$

Las condiciones de primer orden de este problema son (los subíndices t se omiten en lo que sigue a no ser que sea estrictamente necesario):

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0 \tag{14.7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = -\frac{d[\lambda e^{-(\rho-n)t}]}{dt} \tag{14.8}$$

Esto conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u'(c) &= \lambda \\ \lambda(r-n) &= -(\dot{\lambda} - (\rho - n)\lambda) \end{aligned}$$

Combinadas (eliminando λ), estas ecuaciones nos llevan a:

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)c}(r-\rho) \tag{14.9}$$

A esta ecuación debemos agregar además la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t a_t e^{-(\rho-n)t} = 0 \tag{14.10}$$

Más adelante esto nos servirá para eliminar algunas trayectorias que satisfacen (14.9), pero no son óptimas. Esta condición es importante y no es más que una extensión de las clásicas condiciones de Kuhn-Tucker aplicadas en el límite. Si los activos tienen algún valor en términos de utilidad, λ es positivo, entonces no se dejarán activos, es decir, a_t tenderá a 0. Si los activos no tienen valor en términos de utilidad, entonces λ será 0[5].

De (14.9) la tasa de crecimiento del consumo depende exclusivamente de las preferencias del individuo. El término $-u'(c_t)/[u''(c_t)c_t]$ corresponde a la elasticidad de sustitución intertemporal[6]. Esta indica cuán dispuesto está el individuo a sustituir consumo de hoy por consumo futuro. Gráficamente, el

[4]Ver apéndice 14.A de este capítulo sobre optimización dinámica en tiempo continuo, en donde se derivan las condiciones de optimalidad.

[5]Ver apéndice 14.A para mayor intuición de la condición de holgura complementaria.

[6]El inverso de la tasa de sustitución intertemporal es el coeficiente de aversión al riesgo. Una discusión de la elasticidad intertemporal de sustitución se realiza en la sección 3.3.3 y sus implicancias sobre el precio de los activos en 3.7.2.

inverso de esta elasticidad es la curvatura de la función de utilidad (es algo así como la elasticidad de la derivada). Si la elasticidad de sustitución es cercana a 0, significa que el individuo no desea cambiar algo de consumo hoy por consumo de mañana, a no ser que el beneficio sea muy alto, y por lo tanto tenderá a tener un consumo relativamente plano a través del tiempo. Esto es una función de utilidad "muy cóncava", o sea con elevada curvatura. En el otro caso, cuando la elasticidad es muy alta, la tasa de crecimiento del consumo es muy alta también (en valor absoluto), ya que está dispuesto a cambiar consumo presente por futuro ante pequeños cambios en la tasa de interés. Este es el caso de una función de utilidad casi lineal.

El término $r - \rho$ indica cuánto más es la tasa de interés de mercado comparada con la tasa de descuento de la utilidad. Si la diferencia es positiva el individuo querrá tener una trayectoria de consumo creciente, es decir, ahorrará en el presente para consumir en el futuro, ya que el mercado le da un retorno mayor de lo que él subjetivamente descuenta la utilidad. Recuerde que la tasa de interés es el precio de mercado del futuro, mientras que la tasa de descuento es el valor desde el punto de vista de la utilidad. En consecuencia, cuando $r > \rho$, el mercado da más valor al presente respecto del futuro que la valoración que el hogar da al presente. Por lo tanto resulta conveniente vender consumo presente para comprarlo en el futuro, entonces el consumo será creciente.

La sensibilidad de la tasa de crecimiento del consumo respecto de la tasa de interés está directamente relacionada con la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.

La función de utilidad instantánea que usaremos es la función con elasticidad intertemporal de sustitución constante (CRRA) que se presentó en la sección 3.3.3. La función está dada por:

$$\begin{aligned} u(c) &= \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \qquad \text{para } \sigma \geq 0 \text{ y } \neq 1 \\ u(c) &= \log c \qquad\quad \text{para } \sigma = 1 \end{aligned}$$

La elasticidad intertemporal de sustitución es $1/\sigma$.

Usando la ecuación (14.9) y considerando la función de utilidad CRRA, tenemos que:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(r-\rho) \tag{14.11}$$

Esto indica que el consumo crece a una tasa igual a $(1/\sigma)(r-\rho)$. Para obtener la función de consumo del individuo definiremos la tasa media de interés entre 0 y t como $\bar{r}_t = \frac{1}{t}\int_0^t r_s ds$. En consecuencia, en cualquier momento el consumo es:

$$c_t = c_0 e^{\frac{1}{\sigma}(\bar{r}_t-\rho)t} \tag{14.12}$$

Ahora lo único que faltaría para derivar la función consumo es sustituir c_0 de la ecuación (14.12), como función de los parámetros del modelo. La forma de hacerlo consiste en integrar hacia adelante la restricción presupuestaria de cada período[7] y así llegar a la restricción presupuestaria intertemporal. Como el lector preverá, esta restricción relaciona los valores presentes de consumo e ingresos, los que en tiempo continuo estarán dados por integrales. Luego, usando la condición óptima de consumo como función de c_0 dada por (14.12), se puede resolver las integrales y encontrar el único valor de c_0 que satisface la restricción presupuestaria. Así, tendremos la función consumo para el período "0", y por extensión para cualquier otro período t.

Lo que se puede demostrar después de realizar el ejercicio descrito es que[8]:

$$c_0 = v_0 \left[a_0 + H_0\right]$$

Donde v_0 es la propensión marginal a consumir de la riqueza del individuo, que está constituida por su riqueza financiera (a) y su riqueza humana (H), que, como es de esperar, corresponde al valor presente de sus ingresos del trabajo (valor presente de los salarios).

Si además suponemos que la tasa de interés es constante, es decir $\bar{r}_t = r$, entonces se puede demostrar que $v_0 = [\rho/\sigma - r(1-\sigma)/\sigma - n]^{-1}$.

¿Cuál es el efecto de un aumento en la tasa de interés sobre el consumo? Manteniendo la riqueza total ($a_0 + H_0$) constante, podemos identificar un efecto sustitución e ingreso. El efecto sustitución reduce el consumo, mientras el efecto ingreso permite que con menor ahorro se pueda tener el mismo consumo. Mientras mayor sea la elasticidad intertemporal de sustitución (menor σ), más probable es que v_0 caiga, es decir, que el efecto sustitución domine. Estos efectos se cancelan para $\sigma = 1$ y v_0 permanece constante. Pero hay un efecto adicional, y es un efecto riqueza, que implica que la riqueza humana caiga cuando la tasa de interés sube, pues el valor presente de los ingresos futuros cae. Este efecto riqueza también hace caer el consumo presente, lo que se suma al efecto sustitución y hace más probable que el efecto neto de un alza de la tasa de interés sobre el ahorro sea positiva.

Empresas

En esta economía la función de producción de las firmas es[9]:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{14.13}$$

[7] En el apéndice 14.B de este capítulo se presenta la integración de la restricción presupuestaria, que nos da una expresión análoga a la derivada en la sección capítulo 3.1, pero esta vez en tiempo continuo.

[8] El lector puede demostrar esto usando la ecuación (14.12) y (14.76) del apéndice 14.B.

[9] La función de producción cumple las condiciones de Inada.

Donde K_t es la cantidad de capital que hay al inicio del período t, y L_t es la cantidad de trabajo empleada durante el período t, igual a la población N_t. En términos per cápita, o más bien dicho por unidad de trabajo, esta es la misma función que vimos en el capítulo 11, es decir, la podemos escribir como $f(k)$.

Supondremos que no hay crecimiento de la productividad de los factores. Este supuesto es para facilitar la presentación, porque tal como vimos en el capítulo 11 la notación se complica. En todo caso, asumir el crecimiento de la productividad total de los factores ayudaría a tener crecimiento de largo plazo más allá del crecimiento de la población[10]. Las firmas arriendan el capital y el trabajo. Se podría pensar en las firmas como entidades que lo único que tienen es acceso a la tecnología. La tasa de arriendo del capital es R. Por otra parte, el capital se deprecia a una tasa δ. Por lo tanto, la tasa de retorno real del capital es igual a la tasa de interés de mercado: $r = R - \delta$. Las firmas demandan factores hasta el punto en que la productividad marginal del factor es igual a su costo. Para el capital, esta condición es:

$$F_K(K, L) = r + \delta \tag{14.14}$$

En términos per cápita, esto es igual a $f'(k)$, es decir[11]:

$$f'(k) = r + \delta \tag{14.15}$$

Para el trabajo, podemos encontrar su productividad marginal a partir de (14.15). Para ello consideramos que las funciones homogéneas de grado 1 cumplen con el teorema de Euler, que nos dice que $F_K K + F_L L = F$. Por lo tanto, tenemos que la decisión óptima de demanda de trabajo, expresada en términos per cápita, estará dada por:

$$w = f(k) - kf'(k)$$

Usando (14.14), esta se reduce a:

$$w = f(k) - k(r + \delta) \tag{14.16}$$

Antes de analizar el equilibrio de la economía es útil destacar que hemos hecho un supuesto institucional específico, simple, pero que podría ser poco realista: que las empresas son cajas negras que producen dado los factores; no invierten ni nada por el estilo, solo arriendan el capital existente en el mercado. Esto facilita el álgebra y los resultados son independientes del esquema

[10] Barro y Sala-i-Martin (2003) presentan el modelo de Ramsey con progreso técnico.

[11] Esto viene de dividir el argumento de (14.14) por L, notando que la derivada de una función homogénea de grado 1, es homogénea de grado 0, es decir si $G(x_1, x_2)$ es homogénea de grado 0 se tiene que $G(\lambda x_1, \lambda x_2) = G(x_1, x_2)$. Más en general, una función homogénea de grado n tiene una derivada homogénea de grado $n - 1$.

institucional supuesto. Por ejemplo, podríamos pensar que las empresas son dueñas del capital y deciden invertir emitiendo acciones que poseen los hogares, a los que les entregan los dividendos. La formalización del problema es algo más compleja por cuanto habría que maximizar el valor presente de la empresa; sin embargo, el resultado final es el mismo. También podríamos suponer que los hogares y productores son los mismos, pero el resultado es también el mismo, pues se cumple con el teorema de separación de Fisher discutido en el capítulo 6.

14.2. Equilibrio en el modelo de Ramsey

14.2.1. Estado estacionario

El equilibrio de esta economía se produce cuando la cantidad de capital ahorrado por los hogares es igual a la cantidad de capital arrendada por las firmas. Esto significa $a = k$. Usando esta condición en la restricción presupuestaria de los hogares y en la conducta de las empresas para determinar los valores de mercado de salarios y renta del capital, se llega a:

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta)k \tag{14.17}$$

Que no es más que la restricción productiva de la economía que dice que la producción total se consume o se ahorra, o simplemente que el ahorro es igual a la inversión. Por otra parte, usando (14.11) y el valor de equilibrio de r, llegamos a la siguiente expresión para la evolución del consumo:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(f'(k) - \delta - \rho) \tag{14.18}$$

Estas dos ecuaciones definen un sistema dinámico para c y k. Las variables per cápita no crecen en esta economía, ya que no hay crecimiento de la productividad total de los factores y la productividad marginal es decreciente a un punto en el cual excesivo capital no genera en el margen suficiente producción para recuperar la depreciación ni para proveer capital para la nueva población. La condición del estado estacionario es que la cantidad de capital y el consumo per cápita no crecen, es decir, $\dot{k} = 0$ y $\dot{c} = 0$. Imponiendo las condiciones de estado estacionario en (14.17) y (14.18) determinamos k^* y c^*.

Además, $\dot{k} = 0$ en (14.17) y $\dot{c} = 0$ en (14.18) determinan el espacio donde el capital y el consumo no crecen, respectivamente, y nos permiten ver la dinámica del sistema en un **diagrama de fase**.

En la figura 14.1 se representa el estado estacionario. La curva $\dot{c} = 0$ es una recta vertical, ya que es independiente del nivel de consumo y plantea que el capital de estado estacionario satisface $f'(k^*) = \rho + \delta$.

Recuerde que el capital de la regla dorada, aquel que maximiza el consumo de estado estacionario, está dado por $f'(k^{RD}) = n + \delta$. La figura muestra que el capital de la regla dorada es mayor que el de estado estacionario. Esto se debe al hecho de que la función de producción es cóncava y $\rho > n$. Esta última condición no la habíamos impuesto antes, pero es necesaria para definir bien el problema de las familias, ya que si la población, *y la felicidad en consecuencia*, crecen más rápido que la tasa de descuento, la utilidad sería infinita y cualquier trayectoria del consumo daría lo mismo. Al capital de equilibrio k^* se le llama **regla dorada modificada**.

Uno se preguntará por qué un individuo que está consumiendo en c^{RD}, preferirá irse a c^*. Para ello nos ayudará discutir la dinámica del sistema, lo que se hace a continuación.

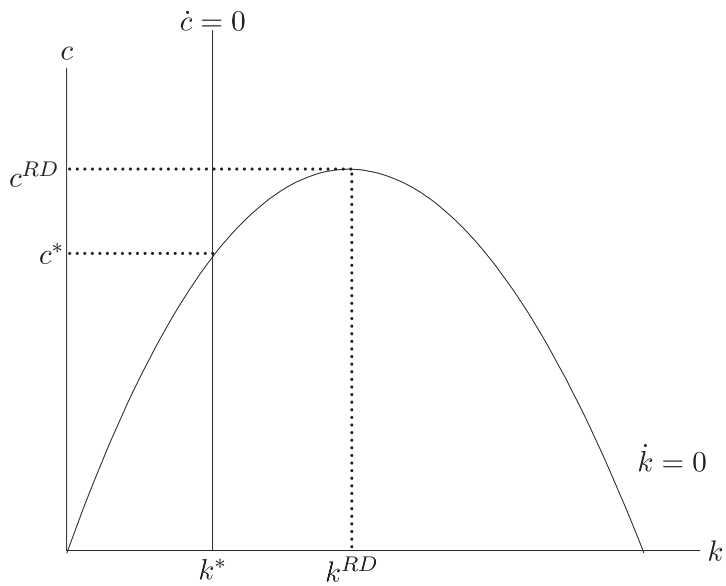


Figura 14.1: Estado estacionario.

14.2.2. Dinámica

La dinámica de esta economía se puede apreciar en el diagrama de fase de la figura 14.2. A la izquierda de $\dot{c}$ el consumo aumenta. La razón es que la tasa de interés es alta como producto del bajo stock de capital, en consecuencia los individuos preferirán tener una trayectoria de consumo creciente. Lo opuesto ocurre a la derecha de $\dot{c}$.

Respecto de $\dot{k}$, esta no es más que la dinámica del capital al igual que en

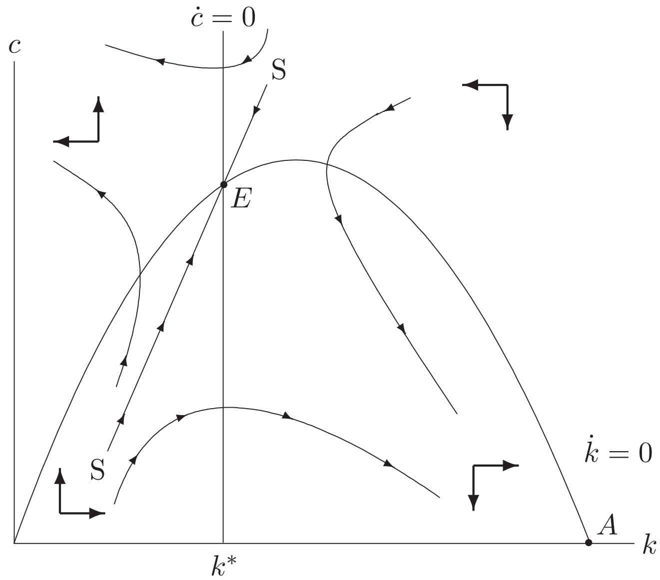


Figura 14.2: Dinámica.

el modelo de Solow. Por arriba de la curva $\dot{k} = 0$ el consumo es muy alto, con lo cual el ahorro es bajo y no alcanza a cubrir la depreciación y crecimiento de la población, y por lo tanto el capital cae. Lo opuesto ocurre debajo de $\dot{k} = 0$, donde el consumo es bajo, el ahorro elevado, y el capital aumenta.

Con este análisis tenemos los cuatro conjuntos de flechas que indican el sentido de la dinámica. Dado cualquier k y c, las flechas, que técnicamente representan la solución matemática de las ecuaciones diferenciales (ecuaciones (14.17) y (14.18)), indican la trayectoria de equilibrio. Examinando la figura se puede ver que hay una sola trayectoria, la SS, que conduce al equilibrio E, y este sistema se conoce como *saddle-path stable*[12]. No es globalmente estable ya que hay muchas trayectorias que divergen, y solo SS conduce a E. Tiene pendiente positiva, es decir el consumo y el capital o aumentan juntos o se reducen juntos.

Uno se puede preguntar cómo hace la economía para estar exactamente en SS y así converger a E. Esa es precisamente la virtud de esta solución. Al ser c una variable de control que se puede ajustar a cualquier valor en cualquier instante, dado un k inicial, c se ubicará en el valor correspondiente sobre SS. En cambio k es una variable de estado que evoluciona lentamente. Si el sistema fuera globalmente estable, tendríamos infinitos equilibrios, de cualquier punto se llegaría a E, y poco podríamos decir de la dinámica de la economía.

[12]Esto se traduce usualmente como trayectoria de punto de silla.

Es importante notar que la economía podría diverger a un punto como A. Sin embargo, este punto viola la condición de transversalidad en el sentido de que se queda con capital en el infinito y sin consumo. Por otra parte, cualquier trayectoria que llegue al eje vertical no es factible, puesto que en ese punto no hay capital y el consumo no podría ser creciente, violando la condición de optimalidad.

Ahora es fácil ver qué hará un individuo que está ubicado en la regla dorada. Instantáneamente su consumo saltará a SS, consumiendo parte del capital, y aprovechando de consumir por sobre el consumo de la regla dorada durante un tiempo para luego descender en el futuro hasta E. ¿Por qué esto es óptimo? Porque el consumo presente vale más que el futuro, por lo tanto, dado de que el individuo prefiere consumir ahora, se comerá parte del capital, disfrutando de mayor valor presente de la utilidad, a pesar de que en estado estacionario su consumo es menor.

Existe una extensa literatura sobre este tópico. Cualquier punto a la izquierda de la regla dorada es dinámicamente eficiente, puesto que consumir más hoy debe ser a costa de sacrificar consumo futuro. Sin embargo, si una economía estuviera con k a la derecha de la regla dorada, podría consumirse una cantidad grande de capital, y mantener el consumo constante. Para ello bastaría que consumiera una cantidad igual a la distancia horizontal entre dos puntos sobre $\dot{k} = 0$.

14.2.3. La solución centralizada

Podríamos resolver este modelo desde el punto de vista de un planificador central que maximiza la utilidad de los hogares y toma las decisiones de la empresa para maximizar la utilidad de los consumidores. Es decir, el problema es:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} U = \int_0^{\infty} u(c_t)e^{-(\rho-n)t}dt \tag{14.19}$$

sujeto a:

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k \tag{14.20}$$

y a las condiciones iniciales de capital.

Es fácil demostrar en este caso que *la solución del planificador central es exactamente la misma que la solución de mercado*. Esto significa que la solución descentralizada es socialmente óptima, con lo cual satisfacemos el primer teorema del bienestar. La razón es que en este modelo no hay ninguna distorsión o externalidad que haga que la solución competitiva no sea la óptima. En otros contextos, como por ejemplo cuando el individuo tiene horizonte finito, pero la economía vive por más tiempo, es posible que las decisiones no sean las óptimas desde el punto de vista social ya que en las decisiones privadas el horizonte de planificación es incompleto. Este es el caso, por ejemplo, de muchos modelos de generaciones traslapadas.

14.3. Análisis de políticas

No teniendo dinero en este modelo, aunque es posible incorporarlo, de la única política macroeconómica que podemos hablar es de política fiscal, de impuestos y gastos.

(a) Gasto del gobierno financiado con impuestos de suma alzada

En esta economía ahora introduciremos el gobierno, el cual tiene un gasto agregado de G, que en términos per cápita es g. Para financiar el gasto el gobierno recauda impuestos de suma alzada, τ_t por persona. El gobierno mantiene un presupuesto equilibrado en todos los períodos[13]. La restricción presupuestaria de los hogares es:

$$\dot{a} = w + ra - na - c - \tau \tag{14.21}$$

El equilibrio de esta economía se obtiene igual que en el caso sin gobierno, solo que ahora con (14.21) como restricción presupuestaria, donde hemos usado el hecho que $g = \tau$, Es decir:

$$\dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k - g \tag{14.22}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(f'(k) - \delta - \rho) \tag{14.23}$$

Con la llegada del gobierno, lo único que sucede es que baja el consumo, pero el nivel de capital de estado estacionario es el mismo que la economía sin gobierno. Esto se puede apreciar en la figura 14.3. Es decir, hay *crowding out* exacto e inmediato. Todo lo que sube el gasto del gobierno es a costa de una reducción del gasto privado de igual magnitud. Los individuos reducen su consumo en la magnitud de los impuestos, y por lo tanto sus decisiones de ahorro e inversión no cambian, con lo cual el modelo es cualitativamente el mismo, ya que ni el gasto ni los impuestos generan distorsiones.

Si no hubiera gobierno, y repentinamente aparece el gobierno y decide gastar g, el ajuste hacia el nuevo estado estacionario será instantáneo. Como el capital de estado estacionario es el mismo, la tasa de interés es también la misma. Es decir, tal como ya vimos en el modelo de dos períodos, un aumento permanente del gasto de gobierno no afecta la tasa de interés, pues no necesita cambiar la pendiente de la trayectoria del consumo.

[13] Lo importante es el valor de los gastos y el *timing* de impuestos es irrelevante ya que en este modelo se cumple la equivalencia ricardiana discutida en el capítulo 5. Más adelante, en la sección 14.4 se muestra cómo se cumple la equivalencia ricardiana y cómo, a pesar de haber horizonte infinito, este resultado podría no cumplirse.

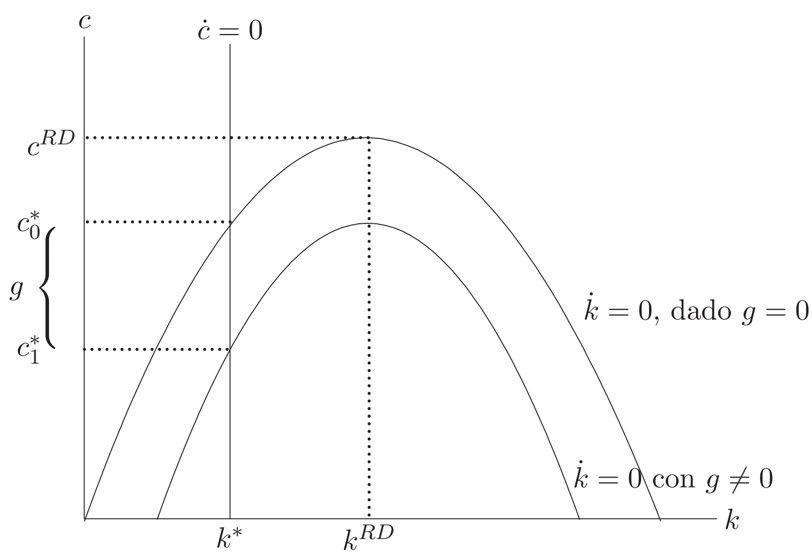


Figura 14.3: Estado estacionario con gobierno

(b) Impuestos y distorsiones

Si en lugar de aplicar un impuesto de suma alzada se aplica un impuesto al capital lo que va a suceder es que se le va a exigir mayor rentabilidad al capital antes de impuesto, por lo tanto k^* disminuye[14].

Veamos el caso de un impuesto al ingreso de los hogares, a una tasa de θ por unidad de ingreso. Para simplificar la descripción asumiremos que el gasto recaudado por este impuesto se devuelve en forma de suma alzada a los individuos, donde la transferencia es de ϱ por individuo. Así, nos concentramos solo en el efecto de la distorsión, ya que como vimos en el caso anterior, el gasto solo genera *crowding-out* con gasto privado.

En este caso, la restricción presupuestaria del individuo está dada por:

$$\dot{a} = (w + ra)(1 - \theta) - na - c + \varrho \tag{14.24}$$

Realizando los reemplazos correspondientes, veremos que la ecuación $\dot{k} = 0$ no cambia, ya que no cambia la restricción agregada de los individuos al ser quienes consumen todos los bienes. Sin embargo la trayectoria del consumo estará afectada por los impuestos:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(f'(k)(1 - \theta) - \delta - \rho) \tag{14.25}$$

[14]Esto viene del hecho de que $f(k)$ es cóncava.

Esto implica que el capital de estado estacionario caerá de k_0^* a k_1^* en la figura 14.4, debido a que se requerirá un capital con productividad marginal igual a $(\delta+\rho)/(1-\theta)$, lo que implica una caída en el capital de estado estacionario, y en consecuencia algo similar pasa con el consumo.

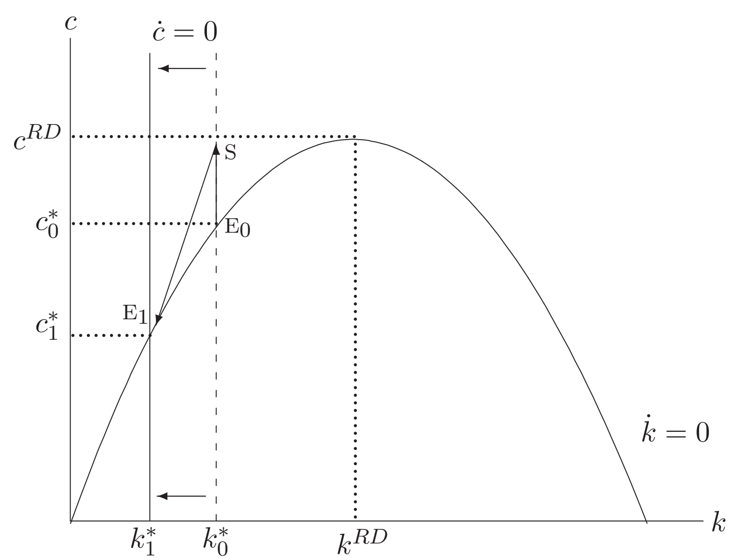


Figura 14.4: Impuestos distorsionadores.

Si a la economía se le aplica impuestos, partiendo del estado estacionario E_0 sin impuestos, irá gradualmente a E_1. La dinámica será un salto inmediato del consumo hacia arriba hasta el punto S, que se ubica sobre la única trayectoria estable. Luego, irá gradualmente convergiendo a E_1.

Este ejercicio muestra cómo podemos avanzar en el análisis de las políticas económicas al especificar con rigor y fundamentos microeconómicos la conducta de los hogares. Además, al especificar su función de utilidad, y al asumir que todos los individuos son iguales, es decir, con la simplificación del **agente representativo**, es fácil hacer análisis de bienestar. En todo caso, al usar un agente representativo obviamente estamos ignorando uno de los aspectos más complejos en teoría del bienestar, y es analizar los efectos distributivos.

El análisis para un impuesto al capital, o dividendos, o pago de intereses, es similar al análisis de impuestos al ingreso. En todos ellos terminamos con un retorno después de impuestos igual a $r(1-\theta)$, lo que implica que se exige más rentabilidad al capital para poder pagar impuestos. En consecuencia, el capital de estado estacionario es menor, para así ser más productivo en el margen.

Lo anterior no ocurre en el caso de los impuestos al trabajo. Al agregar $w(1-\theta)$ en la restricción presupuestaria no hay ningún efecto sobre el equilibrio. Uno estaría tentado a decir que el óptimo es no poner impuestos al capital y solo cobrar impuestos al trabajo, algo que efectivamente algunos modelos más completos demuestran. Sin embargo, en nuestro caso esto es el resultado de que el trabajo es ofrecido de manera inelástica, en consecuencia, los impuestos no afectan las decisiones de trabajo y son equivalentes a impuestos de suma alzada. Esto es una extensión trivial de la teoría de finanzas públicas (*Ramsey-taxation*) que indica que hay que gravar más los bienes ofrecidos más inelásticamente. Si, por ejemplo, agregáramos la acumulación de capital humano o una oferta de trabajo sensible a los salarios, el resultado sería muy distinto en términos de los impuestos relativos al trabajo y el capital.

El propósito de realizar estos ejercicios es solo para introducir las muchas aplicaciones que tienen los modelos de este tipo. Podríamos pensar en muchos otros ejemplos no solo de impuestos sino también de gastos. Podríamos, por ejemplo, asumir que el gasto del gobierno provee bienes complementarios para la producción de la economía (gasto productivo), en cuyo caso uno podría discutir temas como tamaño del gasto de gobierno y su financiamiento. También podríamos discutir los efectos de la aplicación de políticas de manera transitoria, o la anticipación de cambios de políticas futuras[15].

14.4. Equivalencia ricardiana y horizonte infinito

A continuación mostraremos con mayor grado de formalidad cómo se cumple la equivalencia ricardiana en el modelo de Ramsey, y además mostraremos la importancia de tener horizonte infinito y crecimiento de la población.

Para simplificar la presentación asumiremos que el tiempo es discreto, la tasa de interés es constante, y que los hogares, al maximizar la utilidad agregada de la familia, enfrentan la siguiente restricción presupuestaria[16]:

$$w_t L_t + (1+r)A_t = C_t + \Gamma_t + A_{t+1} \tag{14.26}$$

Donde Γ_t es la carga tributaria total del hogar. Dividiendo por L_t para expresar esta restricción en términos per cápita, y notando que $A_{t+1}/L_t = (A_{t+1} \times L_{t+1})/(L_{t+1} \times L_t)$, tenemos que a nivel per cápita la restricción es:

$$w_t + (1+r)a_t = c_t + \tau_t + (1+n)a_{t+1} \tag{14.27}$$

[15] Para este tipo de aplicaciones se puede examinar Blanchard y Fischer (1989), Barro y Sala-i-Martin (2003) y Romer (1996).

[16] El tamaño de la población, N_t es igual a la fuerza de trabajo L_t.

Donde τ_t es el nivel de impuestos per cápita. Integrando esta expresión hacia adelante y usando la condición de no-Ponzi tradicional, tendremos que[17]:

$$(1+r)a_t = \sum_{s=t}^{\infty}(c_s + \tau_s - w_s)\left(\frac{1+n}{1+r}\right)^{s-t} \tag{14.28}$$

Donde se requiere que $r > n$ para tener una suma que converja. Esta restricción dice que la riqueza total disponible a fines del período (después que se pagan los intereses) debe ser igual al valor presente del consumo más el pago de impuestos per cápita. La tasa de descuento es aproximadamente $r - n$[18].

Por su parte, el gobierno tiene una deuda B, gasta G, y cobra impuestos por Γ, de modo que su restricción presupuestaria, expresada en términos per cápita será:

$$(1+r)b_t = \tau_t - g_t + (1+n)b_{t+1} \tag{14.29}$$

Integrando hacia adelante nos lleva a:

$$(1+r)b_t = \sum_{s=t}^{\infty}(\tau_s - g_s)\left(\frac{1+n}{1+r}\right)^{s-t} \tag{14.30}$$

Esto nos dice que el valor presente de los superávit operacionales, descontados a $r - n$, debe ser igual al stock inicial de deuda incluido el pago de intereses. La riqueza del individuo a está compuesta de bonos del gobierno b y el resto, que como ya vimos, es el stock de capital de la economía, k. Ahora podemos reemplazar la restricción presupuestaria del gobierno en la de los hogares, usando además el hecho de que $a = k + b$, para llegar a:

$$(1+r)k_t = \sum_{s=t}^{\infty}(c_s + g_s - w_s)\left(\frac{1+n}{1+r}\right)^{s-t} \tag{14.31}$$

Esta es una formulación general de la equivalencia ricardiana, de la que se destacan dos aspectos importantes:

- La deuda pública no es riqueza neta, como lo definió Barro (1974). La razón es que la deuda, que es riqueza del público, se debe pagar con impuestos futuros cobrados a los mismos tenedores de dicha deuda. Por lo tanto, si el gobierno emite deuda para cobrar menos impuestos, lo único que está haciendo es postergar el cobro de impuestos, que en valor presente debería ser igual a la reducción presente de impuestos. En otras palabras, la deuda del gobierno que tienen los individuos solo representa impuestos futuros.

[17] Este problema lo podríamos hacer en tiempo continuo usando las expresiones encontradas en el apéndice 14.B, pero para simplificar la presentación se usa tiempo discreto. Ambas especificaciones llevan a los mismos resultados.

[18] En términos exactos es $(1+r)/(1+n) - 1$.

- Desde el punto de vista de las posibilidades de consumo de los hogares, lo importante es la trayectoria de gastos, que es lo que en definitiva define la carga neta de impuestos. El *timing* de los impuestos es irrelevante.

Ahora bien, el supuesto de horizonte infinito no parece ser una exageración para muchos problemas de finanzas públicas. Más bien, la idea es que en la medida que los cambios en la política fiscal ocurran en lapsos no muy largos, los individuos pueden ser considerados para efectos prácticos como teniendo horizonte infinito. De hecho, conforme a Poterba y Summers (1987), este es un supuesto razonable. Sin embargo, ellos argumentan que, por ejemplo, una rebaja de impuestos es compensada por alzas en unos diez años más. Sin embargo, ellos también indican que en los 10 años más habrá nuevos individuos en la fuerza de trabajo, de manera que una rebaja de impuestos de 1 hoy deberá ser compensada con un aumento de $1/(1+\tilde{n})$ en el futuro, donde $\tilde{n}$ es el crecimiento de la población entre hoy y el alza futura.

La clave para que se cumpla la equivalencia ricardiana no es que el horizonte sea infinito, sino que las tasas de descuento de los individuos y el gobierno sean iguales. En nuestro caso son iguales porque el individuo maximiza la utilidad del hogar y no la individual. Implícitamente hay un supuesto altruista respecto de las generaciones futuras para que se cumpla la equivalencia ricardiana. Sin embargo, si los individuos maximizan su utilidad individual, veremos a continuación que la equivalencia ricardiana no se cumple, a pesar de que el horizonte sea infinito.

Suponga que el individuo solo se preocupa de su utilidad, por lo tanto tenemos que su restricción presupuestaria será:

$$(1+r)a_t = c_t + \tau_t - w_t + a_{t+1}$$

Para simplificar, si suponemos que los salarios, impuestos y consumo son constantes en el tiempo y además reemplazamos a por $b+k$, llegaremos a la siguiente restricción presupuestaria intertemporal:

$$k_t + b_t = (c + \tau - w)/r \tag{14.32}$$

Para el gobierno haremos más supuestos simplificadores, asumiendo que no hay gasto de gobierno. Se cobran impuestos solo para pagar la deuda pública. La restricción presupuestaria per cápita del gobierno será:

$$(1+r)b_t = \tau_t + (1+n)b_{t+1}$$

Finalmente, se asumirá que el gobierno sigue una política tributaria de mantener los impuestos constantes a un nivel que mantenga la deuda pública per cápita constante, lo que lleva a la siguiente restricción:

$$\tau_t = (r-n)b_t \tag{14.33}$$

Reemplazando esta última expresión para los impuestos en la restricción individual (14.32), llegamos a:

$$k_t + b_t \frac{n}{r} = \frac{c + w}{r} \tag{14.34}$$

Por lo tanto, en la medida en que $n > 0$, b será riqueza. Debido a que debimos asumir que $r > n$, no toda la deuda es riqueza. La equivalencia ricardiana no se cumple ya que la deuda hoy será pagada con impuestos futuros, pero estos serán compartidos con el pago de impuestos de individuos que aún no nacen, ni trabajan, y no tienen relación con los individuos que trabajan hoy. Recuérdese que no hay gasto de gobierno, de modo que si $n = 0$, este problema sería como si no hubiera gobierno ya que los impuestos solo se usan para cancelar la deuda.

Este punto fue demostrado por Weil (1989), enfatizando que la clave no es si el individuo vive infinito o no, sino la tasa de descuento respecto de la del gobierno. El precursor de estos modelos fue uno desarrollado en Blanchard (1985), quien presenta un modelo donde los individuos pueden morir en cada instante con una probabilidad p, en este caso si no hay crecimiento de la población el gobierno descuenta a una tasa r, mientras el individuo lo hace a $r+p$, lo que lleva a que la equivalencia ricardiana no se cumpla. Barro (1974) por su parte, en un trabajo muy importante, argumentó que aunque el horizonte sea finito, la equivalencia ricardiana se cumple cuando los padres se preocupan del bienestar de los hijos. En el contexto de nuestra discusión esto ocurre cuando la optimización es respecto de todo el hogar y no solo individual. En el caso de padres altruistas, se recupera los resultados de horizonte infinito, y los cambios de financiamiento del presupuesto público afectan a los hogares no solo a través del ahorro, sino además a través de la herencia u otras transferencias a sus hijos. En consecuencia, una discusión muy relevante que siguió a Barro (1974) es hasta qué punto el motivo altruista es relevante. Es decir, hasta dónde, por mucho que los padres incorporen la utilidad de sus hijos en sus decisiones, el motivo altruista será "operativo" y en el óptimo las transferencias serán distintas de 0. Aunque, tal como discutimos en el capítulo 5 es difícil pensar que la equivalencia ricardiana se cumpla, algún efecto de compensación sí existe, 30 a 60 por ciento tal vez, y es un punto importante para organizar la discusión (así como la competencia perfecta en teoría microeconómica).

14.5. Crecimiento endógeno

En el capítulo 12 explicamos lo que son los modelos de crecimiento endógeno: aquellos en los cuales el PIB per cápita puede crecer permanentemente sin necesidad que asumamos exógenamente crecimiento de la productividad. Ahora podemos poner los modelos del capítulo 12 en el contexto de un individuo representativo que tiene un horizonte infinito y decide su ahorro.

14.5.1. El modelo AK

El modelo de Rebelo, que asume una tecnología AK, es fácil de resolver reconociendo que $f'(k) = A$. En consecuencia, la tasa de crecimiento del consumo será:

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(A - \delta - \rho)$$

Es fácil de demostrar, usando la restricción de producción de la economía: que el capital y el producto también crecerán a esta misma tasa. No hay convergencia ni dinámica transicional. La economía crece para siempre a esta tasa, y el crecimiento es endógeno, como resultado de que la productividad marginal del capital no es decreciente.

Si agregáramos impuestos al ingreso a una tasa τ, el término A lo deberíamos reemplazar por $A(1-\tau)$, con lo cual la tasa de crecimiento caería permanentemente como producto de los impuestos.

14.5.2. Externalidades y gasto público

Otro caso interesante de analizar es cuando hay desbordamiento del conocimiento, como propuso Romer (1986). En este caso, la función de producción per cápita es $Ak^{1-\alpha}\bar{k}^{\alpha}$. La productividad marginal desde el punto de vista de una empresa individual es $A(1-\alpha)$, tomando en cuenta que en equilibrio $k = \bar{k}$. Por lo tanto la tasa de crecimiento, para el consumo, capital y producto de esta economía, denotada por γ, será:

$$\gamma = \frac{1}{\sigma}(A(1-\alpha) - \delta - \rho)$$

Este modelo también tiene crecimiento endógeno, pero desde el punto de vista de un planificador central, que incorpora en su decisión el que $k = \bar{k}$, la productividad marginal del capital será A, ya que incorpora el efecto a nivel de la empresa, pero también el efecto de desbordamiento (del inglés *spillover*) sobre el resto de las empresas a través de la difusión del conocimiento, medido por $\bar{k}^{\alpha}$. En consecuencia, la tasa de crecimiento óptima desde el punto de vista social, denotada por γ^s, será:

$$\gamma^s = \frac{1}{\sigma}(A - \delta - \rho)$$

La tasa de crecimiento de la economía descentralizada es menor que el óptimo social, por cuanto las empresas no internalizan el hecho de que cuando invierten están produciendo un beneficio social sobre las otras empresas a través de la difusión del conocimiento. *Para llegar al óptimo habrá que subsidiar la inversión, más bien al capital.* Si por el uso de una unidad de capital la firma recibe un subsidio s, la productividad privada del capital será $A(1-\alpha)(1+s)$, en cuyo caso el subsidio óptimo será tal que $(1+s)(1-\alpha) = 1$, o sea $s = \alpha/(1-\alpha)$.

Por último, otro caso interesante de analizar es el de gasto de gobierno complementario con la acumulación de capital. Bastaría considerar que la función de producción per cápita es de la forma $f(k, g)$, donde g es gasto productivo de gobierno, por ejemplo infraestructura o gasto en educación, que permite tener una fuerza de trabajo más calificada, y por lo tanto $f_g > 0$ y en la medida que sea complementario con el capital tendremos que la productividad marginal del capital crece con el gasto de gobierno ($f_{kg} > 0$). De esta forma podríamos analizar el nivel de g óptimo y la forma de financiarlo, ya que habría que recurrir a impuestos que distorsionan las decisiones de ahorro y por lo tanto también afectan el crecimiento.

14.6. La economía abierta

Hemos ignorado temas de economía abierta, lo que sin duda puede aparecer poco realista dado el énfasis puesto en tipos de cambio, flujos de capitales, etcétera, y el hecho de que vivimos en un mundo muy integrado. Sin embargo, la economía abierta tiene ciertos problemas técnicos que discutiremos a continuación. Además, no parece ser muy exagerado considerar economías cerradas cuando analizamos el crecimiento de largo plazo, porque tal como mostraremos a continuación, y basados en la evidencia de Feldstein-Horioka, no hay muchas diferencias cualitativas, salvo que uno quiera específicamente tocar temas de economías abiertas, como el efecto de los flujos de capitales o la apertura al exterior.

Si una economía pequeña es abierta a los flujos de capitales, y la tasa de interés internacional es r^*, uno esperaría flujos de capitales hasta que la rentabilidad del capital sea igual a r^*, es decir, habrá un stock de capital tal que $f'(k) = r^* + \delta$. Más aún, a diferencia de la economía cerrada, donde para acumular capital hay que ahorrar, lo que provoca un ajuste gradual al equilibrio de largo plazo, en el mundo hay suficiente ahorro para llevar instantáneamente el stock de capital al nivel de equilibrio de largo plazo. O sea, el principal problema que enfrentamos con una economía abierta es que hay una predicción muy poco realista, y consiste en que los capitales se moverían instantáneamente para igualar su productividad alrededor del mundo, con lo cual la convergencia sería inmediata. Esto ciertamente no ocurre en el mundo.

Por lo tanto, hay que agregar algo al modelo estándar de Ramsey para poder aplicarlo de manera realista a una economía abierta. Aquí se indican dos rutas que han logrado generar un ajuste lento en una economía abierta.

La primera fue desarrollada por Olivier Blanchard (ver Blanchard y Fischer, 1989), quien propuso incorporar costos de ajuste a la inversión. Es decir, no habrá inversión infinita, pues existen costos de instalación. No se pueden construir todas la carreteras y fábricas instantáneamente porque esto tiene costos. Hay costos de coordinación y organización, las fábricas hay que construirlas, y aunque haya abundantes fondos para financiarlas, no se puede llegar e instalar el capital. Esto mismo ocurre a nivel de las empresas y ya lo discutimos en el capítulo 4.8. Existen costos para llevar el stock de capital hacia el óptimo.

La idea formal es que si bien el aumento del stock de capital es igual a la inversión neta, $\dot{k} = i - \delta k$, donde i es la inversión, los inversionistas para invertir i deben gastar más de i. Una formalización interesante (ver Blanchard y Fischer, 1989), es suponer que para tener una inversión de i hay que gastar $i(1+\phi)$, donde ϕ representa el costo de instalación, y es una función creciente y convexa de i/k. Es decir, el costo de instalación aumenta con la fracción que se desea aumentar el capital. Note que si no hay depreciación i/k representa el porcentaje que aumenta el capital. Para una economía escasa en capital, será muy costoso que este suba demasiado como para alcanzar la productividad mundial.

Ahora, sin necesidad de detallar el resultado exacto, podemos intuir cómo será el modelo de Ramsey en una economía abierta con perfecta movilidad de capitales y costos de ajuste a la inversión. En el largo plazo las economías convergerán, salvo por diferencias en instituciones y políticas, al mismo estado estacionario. Sin embargo, el ajuste será gradual, porque es costoso instalar el capital. Esta es exactamente la misma lógica usada en el capítulo sobre inversión, donde tuvimos que asumir costos de ajuste para que las empresas (países en este caso) no fueran al mercado de capitales (mundial en este caso) y consiguieran todo el capital para alcanzar su nivel de capital óptimo y así poder definir una función de inversión.

La segunda forma de racionalizar por qué el ajuste al equilibrio no es instantáneo es considerar restricciones al movimiento de capitales. En particular se puede asumir que hay dos tipos de capital: humano y físico. El capital físico es completamente móvil, pero no así el capital humano debido a que no se puede colateralizar la inversión en capital humano ya que no hay esclavitud[19]. Esta es una idea interesante y realista, cuyas conclusiones son más cercanas a lo que observamos en la evidencia internacional. Podemos pensar que la inversión en capital físico se puede usar como colateral para los préstamos y así es posible conseguir financiamiento ilimitado. No es ese el caso del capital humano. Esta es solo una forma realista de hacer un punto tal vez más general. En el fondo, lo que suponemos es que hay dos formas de capital: los que pueden colateralizarse en los mercados internacionales, y aquellos en que no es posible.

La intuición del modelo es relativamente simple y plantea que habrá siem-

[19]Esta idea es desarrollada en Barro, Mankiw y Sala-i-Martin (1995).

pre una razón capital-producto constante y dada por la condición de libre movilidad de capitales. Sin embargo, el capital humano se irá acumulando gradualmente, con lo que el producto y el capital físico también irán creciendo de forma gradual, a pesar de que no hay restricciones al movimiento de capital físico, puesto que su productividad está limitada por la dotación de capital humano. El capital humano no se puede ajustar instantáneamente a su óptimo de largo plazo debido a las imperfecciones de los mercados de capitales internacionales[20]. A continuación se presenta una versión simplificada de este modelo. La función de producción es:

$$Y = AK^{\eta}H^{\alpha}L^{1-\alpha-\eta}$$

Donde $\alpha + \eta < 1$. En términos per cápita tenemos:

$$y = Ak^{\eta}h^{\alpha}$$

La productividad marginal de cada factor viene dada por:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \eta A k^{\eta-1}h^{\alpha} = \frac{\eta y}{k} \tag{14.35}$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \alpha A k^{\eta}h^{\alpha-1} = \frac{\alpha y}{h} \tag{14.36}$$

Supondremos que los consumidores son también productores. De esta forma integramos a las firmas con los consumidores, lo que facilita el desarrollo del modelo. Supondremos además que el capital se acumula de igual forma que en la subsección 12.1.1, donde ambos capitales son perfectos sustitutos desde el punto de vista de su acumulación. No obstante, aquí la deuda estará solo ligada al capital físico, pues no hay endeudamiento para acumular capital humano. Por lo tanto el consumidor-productor resuelve el siguiente problema:

$$\text{máx} \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-(\rho - n)} dt$$

sujeto a:

$$\dot{k} + \dot{h} - \dot{d} = Ak^{\eta}h^{\alpha} - (\delta + n)(k + h) - (r^* - n)d - c \tag{14.37}$$

Donde n es el crecimiento de la población y c es el consumo per cápita, $\dot{d}$ es la acumulación de deuda externa y r^*d es el pago de intereses de la deuda. El retorno a los factores está totalmente incorporado en el primer término del lado derecho, debido a que los consumidores también producen.

[20]Adicionalmente podríamos suponer que hay costos de ajuste para acumular capital humano. Toma tiempo, hay que educarse, y por lo tanto no se puede ajustar a su valor de largo plazo aun cuando haya financiamiento.

Si hay perfecta movilidad de capitales para el capital físico, su productividad, dada por (14.35), deberá igualar a su costo de uso, es decir la tasa de interés internacional más la depreciación. De ahí podemos resolver para la relación entre capital y producto que vendrá dada por:

$$k = \frac{\eta}{r^* + \delta} y \tag{14.38}$$

Reemplazando esta expresión para el capital en la función de producción y resolviendo para el producto, llegaremos a la siguiente seudo-función de producción, la que ya incorpora la decisión óptima de capital:

$$y = Bh^\theta \tag{14.39}$$

Donde:

$$B = \left[\frac{A^{1/\eta}\eta}{r^* + \delta}\right]^{\frac{\eta}{1-\eta}} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\alpha}{1-\eta} \tag{14.40}$$

Finalmente, asumiremos que la restricción financiera es activa, es decir, se demanda financiamiento externo para todo el stock de capital físico y $d = k$. De esta forma, la restricción presupuestaria del individuo representativo es:

$$\dot{h} = Bh^\theta - (\delta + n)h - (r^* + \delta)k - c \tag{14.41}$$

Pero, por el teorema de Euler tenemos que el pago al factor capital, $(r^*+\delta)k$, debe ser igual a su participación en la producción, ηy, que es igual a ηBh^θ, con lo que la restricción presupuestaria queda reducida a:

$$\dot{h} = (1-\eta)Bh^\theta - (\delta + n)h - c \tag{14.42}$$

El problema del consumidor-productor queda reducido a maximizar su función de utilidad sujeto a esta última restricción presupuestaria. Por analogía con el problema de Ramsey, o resolviendo directamente la optimización dinámica, llegamos a la siguiente condición óptima para la trayectoria del consumo:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(\theta Bh^{\theta-1} - \rho - \delta) \tag{14.43}$$

Con esto hemos concluido que una economía abierta, pero con limitación parcial al endeudamiento, debido a que parte del capital no se puede usar como colateral, tendrá una evolución cualitativamente similar a la economía cerrada. En este caso habrá un estado estacionario para h similar al del capital en el modelo de Ramsey, y en este estado estacionario el capital y el producto también convergerán gradualmente a este equilibrio de largo plazo. Es decir recuperamos algo cualitativamente similar al modelo de economía cerrada, pero ahora en una economía abierta donde una parte del capital no se puede financiar externamente. Calibraciones sencillas muestran que la velocidad de convergencia de economía abierta será similar a la de economía cerrada, y al interpretar más ampliamente el capital, incluyendo capital físico y humano, este modelo predice una velocidad de convergencia similar a la que observamos en la realidad.

Existen otras consideraciones adicionales que habría que hacer a los modelos de economía abierta. Por ejemplo, es importante la relación entre la tasa de descuento ρ y la tasa de interés internacional r^*. Si la economía local es más paciente que el resto del mundo ($\rho < r^*$), uno podría imaginar una situación en la cual la economía doméstica le presta continuamente al mundo, hasta un punto en que poseería toda la riqueza mundial. Por ello, en general se supone igual grado de impaciencia, o alguna otra forma que haga variar los parámetros de impaciencia de modo de evitar estas implicaciones poco realistas. Aquí no entraremos en esa discusión.

En todo caso, a modo de resumen podemos concluir que desde el punto de vista del crecimiento de largo plazo no existen diferencias cualitativas muy importantes al analizar el crecimiento económico como si este ocurriera en economías cerradas. No obstante, en teorías de crecimiento, en particular en lo que se refieren a la difusión del conocimiento y la productividad, factores como cuán abierta es la economía son de primera importancia y pueden tener implicancias significativas.

14.A. Optimización dinámica y control óptimo

En economía asumimos que la mayoría de las decisiones son hechas a través de un proceso de optimización. Aquí se presentan los elementos básicos para resolver problemas de optimización dinámica en tiempo continuo. En este apéndice se discutirá el **Principio del Máximo de Pontriagyn** que se usa para resolver problemas de control óptimo[21].

El propósito es presentar una derivación simple de los resultados y por ello se sacrifica rigor para ganar intuición. Por ejemplo no se discutirá condiciones de existencia, unicidad de la solución, o condiciones suficientes. El foco será en las condiciones necesarias que deben satisfacer las soluciones óptimas.

El problema general a resolver es:

[P.1]

$$\text{máx}\, J \equiv \int_0^T F(x(t), u(t), t)dt \tag{14.44}$$

[21] Buenas presentaciones de optimización dinámica se pueden encontrar en Dixit (1976) e Intriligator (1971). Algo más avanzado es Kamien y Schwartz (1981), el que es base para este apéndice. Para un tratamiento riguroso se puede ver Fleming y Rishel (1975).

sujeto a:

$$\dot{x} = G(x(t), u(t), t) \tag{14.45}$$
$$\Psi(x(t), u(t), t) \geq 0 \tag{14.46}$$
$$x(t = 0) = x_0 \tag{14.47}$$
$$x(t = T) = x_T \tag{14.48}$$

$x(t)$ es la **variable de estado.** Define el estado del sistema en el instante t, y su evolución temporal está determinada por (14.45). Por ejemplo, en muchos problemas esta variable representa el stock de capital, la deuda pública, el capital humano, y en general variables de stock. Estas son variables que en general no pueden "saltar", solo se mueven gradualmente.

La variable $u(t)$ es la **variable de control.** Es continua a pedazos: es decir, es continua en $[0, T]$ excepto un número finito de veces, t_1, t_2, ..., t_m que pertenecen al interior de $[0, T]$. Además $u(t)$ tiene límites finitos por la derecha e izquierda en cada t_i. Esta variable puede ser: consumo, precios, y en muchos casos variables asociadas a $\dot{x}$. La variable de estado es determinada por la elección del control y las condiciones iniciales. Dado un valor de $x(t)$, una vez que se decide $u(t)$, estamos también determinando, vía (14.45), la evolución de $x(t)$, o más precisamente determinamos $x(t+dt)$, puesto que $u(t)$ y $x(t)$ determinan el cambio de x.

La presencia de variables de control y de estado es lo que hace a un problema dinámico esencialmente distinto de un problema estático. No podemos resolver el problema dinámico como una secuencia de problemas estáticos, ya que los períodos están ligados a través de las decisiones que se toman en cada uno de ellos. $u(t)$ puede decidirse en cada instante, pero dicha decisión afectará al sistema en el futuro, de modo que no solo afectará retornos corrientes, sino también los retornos futuros.

La ecuación (14.46) es una restricción estándar, y en lo que sigue será omitida. T puede ser ∞, pero trabajaremos con tiempo finito, destacando las diferencias cuando el horizonte es infinito. Se puede considerar también un problema "libre de condición terminal". En ese caso x_T y/o T se eligen óptimamente, en vez de ser dados exógenamente.

El problema específico que resolveremos es:

[P.2]

$$\max J \equiv \int_0^T F(x(t), u(t), t)dt \tag{14.49}$$

Sujeto a:

$$\dot{x} = G(x(t), u(t), t) \tag{14.50}$$
$$x(t = 0) = x_0 \tag{14.51}$$
$$x(t = T) \geq x_T \tag{14.52}$$

Nótese que al final la variable de estado puede tomar cualquier valor mayor o igual que x_T, en particular podemos pensar que es 0. Esta simplificación facilitará la solución además de mostrar la importancia de la condición de transversalidad.

Para resolver el problema, escribamos el lagrangiano:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_0^T [F(x(t), u(t), t) + \lambda(t)[G(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)]]\,dt \\ &\quad + \eta_0(x_0 - x(0)) + \eta_T(x_T - x(T)) \qquad (14.53)\end{aligned}$$

$\lambda(t)$ se conoce como la **variable de coestado** y más adelante la interpretaremos, que como ya se puede adivinar estará asociada a los precios sombra. η_0 y η_T son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (14.51) y (14.52), respectivamente.

Estamos interesados en determinar la trayectoria óptima de $u(t)$ y $x(t)$. Sin embargo, en el lagrangiano tenemos $\dot{x}(t)$. Entonces, para tener $\mathcal{L}$ como una función solo de $u(t)$ y $x(t)$, y no de sus derivadas con respecto al tiempo, podemos usar integración por partes. Usando $u = -\lambda$ y $dv = \dot{x}dt$, tenemos:

$$\int_0^T -\lambda(t)\dot{x}(t)dt = -\lambda(t)x(t)\Big|_0^T + \int_0^T x(t)\dot{\lambda}(t)dt$$

Por lo tanto el lagrangiano se transforma en:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_0^t \left[F(x(t), u(t), t) + \lambda(t)G(x(t), u(t), t) + \dot{\lambda}(t)x(t)\right] dt \\ &\quad + \lambda(0)x(0) - \lambda(T)x(T) + \eta_0(x_0 - x(0)) + \eta_T(x_T - x(T)) \qquad (14.54)\end{aligned}$$

Ahora podemos diferenciar el lagrangiano con respecto a $u(t)$ y $x(t)$ e igualar las derivadas a 0:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = F_u + \lambda G_u = 0 \qquad (14.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F_x + \lambda G_x + \dot{\lambda} = 0 \qquad (14.56)$$

En los puntos extremos tenemos las siguientes condiciones necesarias:

$$\lambda(0) = \eta_0 \qquad \text{y} \qquad \lambda(T) = -\eta_T$$

Finalmente, por las condiciones de holgura complementaria de Kuhn-Tucker tenemos la siguiente **condición de transversalidad** (CTV):

$$\lambda(T)(x(T) - x_T) = 0$$

En particular, en caso que x_T es 0, la CTV es:

$$\lambda(T)x(T) = 0$$

Así, para $x(T) > 0$, $\lambda(T) = 0$ y para $x(T) = 0$, $\lambda(T) \geq 0$. Si $x(T)$ fuera $x_T > 0$, la CTV sería $\lambda(T) = 0$.

Cuando T va a infinito, esta CTV es[22]:

$$\lim_{T \to \infty} \lambda(T)x(T) = 0$$

Antes de dar intuición a las CTV, primero interpretaremos $\lambda(t)$. En el óptimo, $\mathcal{L} = J$, por lo tanto $\lambda(0)$ y $\lambda(T)$ son (por el teorema de la envolvente):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x_0} &= \lambda(0) \\ \frac{\partial J}{\partial x_T} &= -\lambda(T) \end{aligned}$$

Entonces, $\lambda(0)$ es el valor marginal de tener una unidad más de x al principio. $\lambda(T)$ es el costo marginal de dejar una unidad más de x al final del horizonte de planificación. En general, usando el principio de optimalidad de Bellman, $\lambda(t)$ puede ser interpretado como el precio sombra de $x(t)$.

La intuición de la CTV es que en T el valor de lo que se deja debería ser 0. Cuando una unidad de x en T tiene valor en términos de la función objetivo $\lambda(T) > 0$, será llevada a su menor valor posible, x_T. Cuando se deja algún x en exceso de x_T, esto será porque $\lambda(T) = 0$. La importancia de la CTV es que elimina trayectorias que pueden satisfacer el sistema de ecuaciones dado por (14.55), (14.56) y (14.50), pero que no son óptimas. De hecho, las CTV son importantes para encontrar una trayectoria óptima única.

Las ecuaciones (14.55), (14.56), la restricción (14.50) y la CTV describen el sistema para λ, x y u. Entonces usted se preguntará dónde aparece el hamiltoniano. El hamiltoniano es una función que facilita la manera de encontrar la solución óptima, y se define como:

$$\mathcal{H} = F(x,u,t) + \lambda(t)G(x,u,t) \tag{14.57}$$

O sea, consiste en dos términos dentro de la integral del lagrangiano (14.53), esto es: "$\mathcal{L} = \int \mathcal{H} + \text{algo}$". Note que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} &= F_u + \lambda G_u \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} &= F_x + \lambda G_x \end{aligned}$$

[22] La CTV en tiempo infinito no siempre es necesaria. Para mayor discusión ver Benveniste y Scheinkman (1982), Michel (1982) y las referencias en esos trabajos.

Comparando estas dos expresiones con (14.55) y (14.56) podemos ver que las condiciones necesarias de optimalidad se pueden escribir como:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \tag{14.58}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\dot{\lambda} \tag{14.59}$$

Estas son muy fáciles de recordar: la derivada parcial del hamiltoniano respecto de las variables de control es 0, y la derivada parcial respecto de la variable de estado es el negativo de la derivada de la variable de coestado respecto del tiempo. Finalmente, se puede notar que las derivadas parciales de $\mathcal{H}$ con respecto a la variable de coestado son iguales a $G(\cdot)$, que es la tasa de acumulación de x:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{x} \tag{14.60}$$

Es decir, se recupera la restricción. Por lo tanto, el sistema final de ecuaciones diferenciales que caracteriza la solución óptima está dado por (14.58), (14.59) y (14.60), y las dos condiciones en los extremos.

Para analizar con más detalle la solución en muchas aplicaciones es posible obtener $u(t)$ de (14.58) como una función de $\lambda(t)$ y $x(t)$. Entonces podemos sustituir esta expresión en (14.59) y (14.60). Estas dos ecuaciones constituirán un sistema de dos ecuaciones diferenciales para $x(t)$ y $\lambda(t)$. Además, las condiciones en los extremos: $x(t = 0) = x_0$, y $\lambda(T)(x(T) - x_T) = 0$, nos darán una descripción del sistema de ecuaciones diferenciales.

Con esas tres ecuaciones podemos encontrar una relación entre u y λ, de modo que en vez de tener un sistema para x y λ (por ejemplo, capital y q en teorías de la inversión), podemos tener una relación para u y x (por ejemplo, consumo y capital en Ramsey). Por supuesto, un diagrama de fase puede ayudarnos a entender la solución sin necesidad de resolver analíticamente el sistema de ecuaciones diferenciales.

La mayoría de los problemas intertemporales en economía envuelven el descuento del futuro, de modo que puede ser útil definir el valor corriente de las variables de coestado, en vez de su valor presente. Considere la siguiente versión de la función $F(\cdot)$ en **[P.2]:**

$$F(x(t), u(t), t) \equiv e^{-\rho t} f(x(t), u(t))$$

Podemos escribir el hamiltoniano como:

$$\mathcal{H} = [f(x, u) + \lambda'(t) G(x, u, t)] e^{-\rho t} \tag{14.61}$$

$\lambda'(t)$ es conocido como el valor corriente de la variable de coestado y la expresión entre paréntesis cuadrado se conoce como el valor corriente del hamiltoniano ($\mathcal{H}'$):

$$\lambda(t) = \lambda'(t) e^{-\rho t} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}'(t) e^{-\rho t}$$

Entonces, las condiciones necesarias pueden expresarse en términos de valores corrientes. Sustituyendo los valores corrientes en las condiciones óptimas (14.58) y (14.59) llegamos a:

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial u} = 0 \tag{14.62}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial x} = -\dot{\lambda}' + \rho\lambda' \tag{14.63}$$

Y la CTV para el caso de $x_T = 0$:

$$\lambda'(T)e^{-\rho T}x(T) = 0$$

Cuando hay descuento, es conveniente escribir el valor corriente del hamiltoniano como en la ecuación (14.61), porque $F(\cdot)$ está valorada en el tiempo t. Sin embargo, basta con recordar (14.58) y (14.59), escribiendo la última condición como $\partial\mathcal{H}/\partial x = d(\lambda'(t)e^{\rho t})/dt$, y $e^{-\rho t}$ se cancelará en ambos lados de la ecuación.

14.B. Integración de la restricción presupuestaria de los individuos

La restricción presupuestaria en cada instante es:

$$\dot{a}_t = w_t + (r_t - n)a_t - c_t \tag{14.64}$$

Multiplicando ambos lados por $e^{-(\bar{r}_t - n)t}$ e integrando entre 0 y T, tendremos que la restricción es:

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{a}_t e^{-(\bar{r}_t-n)t}dt &= \int_0^T w_t e^{-(\bar{r}_t-n)t}dt + \int_0^T (r_t-n)a_t e^{-(\bar{r}_t-n)t}dt \\ &\quad - \int_0^T c_t e^{-(\bar{r}_t-n)t}dt \end{aligned} \tag{14.65}$$

Para simplificar esta expresión, el término del lado izquierdo lo integraremos por partes, para pasar de $\dot{a}$ a a.

Recordando la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{14.66}$$

En nuestro caso, haremos la siguiente elección de u y v:

$$dv = \dot{a}dt \Longrightarrow v = a \tag{14.67}$$

y

$$u = e^{-(\bar{r}_t - n)t} \tag{14.68}$$

En este último caso, para encontrar du tenemos que:

$$du = \frac{d[-(\bar{r}_t - n)t]}{dt} e^{-(\bar{r}_t - n)t} dt \tag{14.69}$$

Donde la primera derivada del lado derecho corresponde a:

$$\frac{d[-(\bar{r}_t - n)t]}{dt} = -(\bar{r}_t - n) - t\frac{d\bar{r}_t}{dt} \tag{14.70}$$

Recordando que definimos $\bar{r}_t$ como la tasa de interés instantánea promedio entre 0 y t, es decir:

$$\bar{r}_t t = \int_0^t r_s ds \tag{14.71}$$

Diferenciando a ambos lados, es fácil ver que:

$$t\frac{d\bar{r}_t}{dt} + \bar{r}_t = r_t \tag{14.72}$$

Con lo cual, reemplazando (14.70) y (14.72) en (14.69) tendremos que:

$$du = -(r_t - n)e^{-(\bar{r}_t - n)t} dt \tag{14.73}$$

Ahora podemos volver a la restricción presupuestaria (14.65), escribiendo el lado izquierdo, después de hacer los reemplazos de la integración por partes, de la siguiente forma:

$$\int_0^T \dot{a}_t e^{-(\bar{r}_t - n)t} dt = a_T e^{-(\bar{r}_t - n)T} - a_0 + \int_0^T a_t(r_t - n)e^{-(\bar{r}_t - n)t} dt \tag{14.74}$$

Usando el lado derecho de esta expresión en (14.65) y simplificando, llegamos a:

$$a_T e^{-(\bar{r}_t - n)T} = a_0 + \int_0^T w_t e^{-(\bar{r}_t - n)t} dt - \int_0^T c_t e^{-(\bar{r}_t - n)t} dt \tag{14.75}$$

Esto nos provee un resultado muy intuitivo: el valor presente de los activos en T es todo lo que se dejó después de consumir entre 0 y T, es decir, los activos iniciales, más el valor presente de los ingresos del trabajo, menos el valor presente del consumo.

Finalmente tomando el límite de T cuando va a infinito y considerando la condición de transversalidad, tendremos que la integración de la restricción presupuestaria nos lleva a:

$$a_0 + \int_0^\infty w_t e^{-(\bar{r}_t - n)t} dt = \int_0^\infty c_t e^{-(\bar{r}_t - n)t} dt \tag{14.76}$$

Es decir, el valor presente del consumo debe ser igual a la riqueza total, la que esta constituida de riqueza financiera (a_0) y de riqueza humana, que corresponde al valor presente de los ingresos laborales.

Este es el mismo resultado que obtenemos en modelos de horizonte finito, o de tiempo discreto (capítulo 3), ya que la idea fundamental de la restricción presupuestaria es la misma.

Problemas

14.1. **Inmigración, crecimiento y distribución del ingreso.** (basado en el capítulo 7.1.2.3 de Obstfeld y Rogoff, 1996). Considere una economía cerrada con un individuo representativo —no hay crecimiento de la población— ("N" nativos iguales) con utilidad:

$$U = \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \tag{14.77}$$

Todos los individuos tienen una unidad de trabajo sin calificación que percibe un salario w. Además, cada individuo tiene un nivel de calificación h, que paga un salario w_h por unidad de h[23].

La función de producción $Y = F(L, H)$ (donde $H = Nh$ y $L = N$) presenta retornos constantes a escala, y los factores son trabajo sin ajuste por calidad (L) y capital humano (N).

El nivel de habilidad o capital humano se deprecia a una tasa δ. Otra simplificación es que el capital humano se acumula sacrificando consumo, o sea:

$$\dot{h} = (w_h - \delta)h + w - c \tag{14.78}$$

a.) Resuelva el problema del consumidor encontrando una expresión para la tasa de crecimiento del consumo ($\frac{\dot{c}}{c}$).

b.) Escriba la función de producción en términos per cápita, y encuentre las expresiones para w y w_h en función de h.

c.) Muestre las dos ecuaciones diferenciales que describen la evolución de h y c. ¿Cuál es el estado estacionario? ¿Cómo es la dinámica?

d.) Suponga una economía que parte con $h < h^*$ (de estado estacionario). A medida que h va subiendo a h^*, ¿qué pasa con w_h y w? Considere w_h/w como el diferencial de salario calificado vs. no calificado. Interprete su resultado en términos de qué pasa con el diferencial de salario a medida que una economía se desarrolla.

[23] Esto es como si la gente se desdoblara en una parte con educación y la otra sin educación. Es una simplificación para resolver el modelo con agente representativo y sin heterogeneidad entre nativos.

e.) Suponga que repentinamente llegan al país M inmigrantes que solo poseen cada uno una unidad de trabajo no calificado y no tienen calificado. Dado que inicialmente la economía estaba en equilibrio con h^* capital humano per cápita, ¿qué pasa con el capital humano per cápita en el instante que llegan los inmigrantes? Escriba la expresión exacta.

Explique qué pasa con w_h y w cuando llegan los inmigrantes y cómo se ajusta la economía al equilibrio. ¿Es h^* el mismo que antes y después de la llegada de los inmigrantes?

f.) Explique que $D = F(Nh, N+M) - F(Nh, N) - MF_l(Nh, N+M)$ es la diferencia entre el ingreso de los nativos antes de la llegada de los inmigrantes y después (cada con sus h de equilibrio). ¿Estarán los nativos mejor o peor después de la llegada de los inmigrantes?[24] ¿"Pillarán" los inmigrantes a los nativos en su nivel de capital humano? ¿Por qué?

14.2. **Distorsiones y crecimiento** (basado en Easterly, 1993). Considere una economía que produce un solo bien conforme a la siguiente función de producción:

$$Y = K_1^{\alpha} K_2^{1-\alpha} \tag{14.79}$$

Donde K_1 y K_2 son dos tipos de capital. El primero se considera que es capital en el sector formal, y el segundo en el sector informal, y por lo tanto no está sujeto a tributación.

En este ejemplo analizaremos los efectos de la tributación sobre el crecimiento económico.

Hay un individuo consumidor-productor que vive infinito y no hay crecimiento de la población. La utilidad está dada por:

$$\int_0^{\infty} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \tag{14.80}$$

Ambos capitales se acumulan invirtiendo y tienen la misma tasa de depreciación, δ, es decir $\dot{K}_i = I_i - \delta K_i$ para $i = 1, 2$.

Cada unidad de capital invertida en el sector formal (1) es gravada con una tasa τ. Los ingresos tributarios son después devueltos al individuo en forma de una transferencia T de suma alzada, *ex post* igual a τI_1, pero tratada por el consumidor como fija.

El capital puede ser instantáneamente trasladado de 1 a 2 y viceversa, o sea son sustitutos perfectos, salvo que uno paga impuestos y el otro no.

a.) Escriba la restricción presupuestaria del individuo.

[24] Para esto use el hecho que una función estrictamente cóncava cumple $\forall\ x,\ y$ que $f(x) < f(y) + f'(y)(x-y)$.

b.) Resuelva el problema de optimización del individuo y encuentre la tasa de crecimiento del consumo en equilibrio, como función de los parámetros del modelo. Muestre que ambos capitales crecen a la misma tasa que el consumo y el producto también. ¿Por qué esta economía puede crecer endógenamente en equilibrio?

Nota: si tiene problemas planteando la parte a.), puede pasar directamente a b.), y ahí ocupar las condiciones de primer orden para responder a.). Defina apropiadamente un capital ampliado.

c.) ¿Cuál es la relación entre la tasa de impuesto y el crecimiento? ¿Por qué? ¿Cuánto debería ser el impuesto que maximiza el crecimiento?

Suponga ahora que los ingresos tributarios son usados para subsidiar la inversión en el sector 2, a una tasa s.

d.) Escriba la nueva restricción presupuestaria del gobierno, suponiendo que este mantiene un presupuesto equilibrado.

e.) Vuelva a resolver el problema y encuentre la nueva relación entre K_1 y K_2.

f.) A partir de sus resultados en d.), usted puede demostrar (pero no lo necesita hacer, salvo que le sobre tiempo) que en estado estacionario se cumple:

$$\tau K_1 = sK_2$$

Use este resultado en la solución de e.) para analizar el efecto de un aumento en la tasa de impuesto (y por lo tanto también del subsidio) en la tasa de crecimiento de la economía.

14.3. **Servicios públicos y derechos de propiedad en el modelo de Ramsey.** Actividades como infraestructura o generación de energía eléctrica pueden ser vistas como eventos que afectan la función de producción. Por otro lado, actividades que resguardan los derechos de propiedad como policía, defensa nacional, justicia, etcétera, pueden ser vistas como afectando la probabilidad de que los agentes económicos retengan la propiedad sobre sus bienes.

Suponga que la probabilidad, p, de mantener la propiedad de la producción que un agente produce es una función creciente del gasto en seguridad $p(G)$ ($p' > 0$, $p'' < 0$). Suponga además que el gasto se financia con un impuesto de suma alzada τ sobre la base de un presupuesto equilibrado.

La función de utilidad del individuo consumidor-productor representativo (no hay ni progreso técnico ni crecimiento de la población) es:

$$U = \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} e^{-\rho t} dt \tag{14.81}$$

Su restricción presupuestaria es:

$$p(G)f(k_t) = \dot{k}_t + c_t + \delta k_t + \tau \tag{14.82}$$

a.) Explique la restricción presupuestaria.

b.) Resuelva el problema óptimo y descríbalo en un diagrama de fase en c y k.

c.) Analice un aumento permanente y no anticipado de G. Describa la trayectoria de equilibrio, y explique qué pasa con el nivel de consumo y capital en el nuevo estado estacionario. ¿Sube o baja el consumo de estado estacionario? ¿Y el capital?

d.) Suponga que el gobierno financia en un inicio el aumento del gasto con deuda pública, dejando para más adelante el aumento de impuestos. Sin usar álgebra conteste si su respuesta en la parte anterior cambia o no con este cambio en el método de financiamiento. Si el impuesto fuera a los ingresos $((1 - \tau_y)p(G)f(k_t)$, ¿cómo cambia su respuesta?

14.4. Considere una empresa que maximiza su valor presente:

$$V = \int_0^\infty [f(k) - i - \delta k] e^{-\rho t} dt$$

Donde i es la inversión bruta ($\dot{k} + \delta k$), y $f(k) = Ak$. Demuestre que la solución óptima a su problema de acumulación de capital consiste en igualar el costo de uso de capital $r + \delta$ con la productividad.

14.5. **Crecimiento y gasto de gobierno productivo** (basado en Barro, 1990). Considere una economía competitiva donde el consumidor-productor representativo vive eternamente y maximiza la siguiente función de utilidad (la población es normalizada a 1 y no crece):

$$\int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} e^{-\rho t} dt$$

La función de producción es la siguiente:

$$y_t = k_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}$$

Donde $0 < \alpha < 1$, y es la producción, k el stock de capital (no se deprecia) y g el gasto de gobierno (imagine que es infraestructura). El gobierno sigue una política de presupuesto equilibrado con una tasa de impuesto proporcional al ingreso de τ (es decir $g_t = \tau y_t$ para todo t).

a.) Calcule la tasa de crecimiento del consumo en estado estacionario como función de τ (note que y y k crecen a la misma tasa que g y usted no necesita demostrarlo). ¿Por qué esta economía puede crecer permanentemente?

b.) Calcule el valor de τ que maximiza la tasa de crecimiento de la economía.

c.) Suponga ahora que la economía es dirigida por un planificador central. ¿Cuál es la tasa de crecimiento que él elegiría? (Recuerde que en este caso maximiza utilidad sujeto a la ecuación de acumulación más la restricción de presupuesto del gobierno). Dado τ, ¿cuál economía crece más, la de mercado o la planificada? ¿Por qué?

14.6. **Bienes transables y no transables** (adaptación a tiempo continuo de Dornbusch, 1983). Considere una economía abierta habitada por un individuo con horizonte infinito. El individuo consume dos tipos de bienes, no transables internacionalmente (c_N) y transables (c_T). Su función de utilidad está dada por:

$$U = \int_0^{\infty} \frac{[c_T(t)^{\phi} c_N(t)^{1-\phi}]^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \tag{14.83}$$

Denote el consumo agregado como $c(t)$ y que corresponde a:

$$c(t) = c_T(t)^{\phi} c_N(t)^{1-\phi} \tag{14.84}$$

El individuo tiene ingresos y más pago de intereses $r^* b$, donde r^* es la tasa de interés internacional y b su stock de activos netos. El precio relativo de los bienes no transables respecto de los transables será denotado por $q = P_N/P_T$, y corresponde al tipo de cambio real. En consecuencia, la restricción presupuestaria instantánea del individuo será:

$$\dot{b} = y + r^* b - c_T - q c_N \tag{14.85}$$

a.) Resuelva el problema de optimización del individuo, asumiendo que q cambia en el tiempo, y su tasa de cambio porcentual es $\hat{q}$. En particular, muestre la relación estática entre el consumo de bienes transables y no transables como función de q y los parámetros. Encuentre además la ecuación de Euler para la evolución del consumo como función de la tasa de interés internacional y otros parámetros del modelo.

b.) Muestre en base a sus resultados y explique por qué cuando el tipo de cambio real está apreciándose ($\hat{q} > 0$, o sea el precio relativo de los no transables respecto de los transables aumenta) el crecimiento sectorial es desbalanceado por cuanto el consumo de bienes transables sube con el tiempo.

c.) Muestre además que cuando esta economía alcanza su estado estacionario, en el cual el consumo agregado c no crece, la tasa de interés real doméstica no se iguala con la tasa de interés internacional. Explique.