Capítulo 4

Inversión

Como ya hemos visto, la inversión corresponde a la acumulación de capital físico. El aumento en la cantidad de máquinas, edificios u otros activos físicos de una empresa corresponde a la inversión. Lo mismo ocurre con el aumento de los inventarios. Por tanto, para analizarla, en primer lugar debemos preguntarnos qué es lo que determina la cantidad de capital que una empresa desea tener, y posteriormente, cómo se acerca a ese capital deseado: ¿lo hace en un instante o gradualmente? Este capítulo se concentra principalmente en la inversión en bienes de capital fijo, y solo se hacen algunas referencias a los inventarios al final de este capítulo.

4.1. La demanda de capital

Comenzaremos analizando la demanda de capital de una empresa cualquiera. Para ello, definiremos el precio de arriendo del capital, denotado por R. Este es el precio que una empresa paga a otra, propietaria del capital, por arrendarlo durante un período. Nosotros pensaremos que en esta economía las empresas no son dueñas del capital, sino que lo arriendan a otras a un precio R por unidad. Al final, los dueños de todas estas empresas, arrendatarias y arrendadoras, son los hogares. El supuesto que las empresas arriendan el capital sirve para facilitar la discusión, aunque también se puede suponer que las firmas son las que invierten y las dueñas del capital, y finalmente los dueños de la firma, que son los hogares, serán igualmente los dueños del capital.

De la teoría microeconómica sabemos que las empresas deciden el uso de factores con el objetivo de maximizar sus utilidades

$$\max_K PF(K,L) - (wL + RK)\,, \tag{4.1}$$

donde P es el precio del bien que las empresas venden, L el empleo, w el salario, K el capital, y R su costo de uso. $F(\cdot,\cdot)$ es la función de producción, creciente y cóncava en cada uno de sus argumentos. Asumimos que el trabajo es constante pues solo estamos viendo dada la decisión de empleo cuánto capital demandará la empresa.

La condición de primer orden al problema de la firma es

$$\frac{R}{P} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \equiv F_K = PMG_K.$$

Esto nos dice que las empresas arrendarán capital hasta que su costo real de arriendo sea igual a la productividad marginal del capital, que corresponde a F_K (derivada parcial de F respecto de K) y denotaremos indistintamente por PMG_K.

Consideremos el caso en que el costo real de una unidad de capital es menor que la productividad marginal del capital. En este caso a las empresas les conviene contratar más, porque cada unidad adicional de capital les proporciona un beneficio mayor de lo que les cuesta arrendarlo ($PMG_K > R/P$). Dado que la productividad marginal es decreciente ($F_{KK} < 0$), a medida que aumenta el capital, habrá un punto en que ésta haya caído lo suficiente como para igualar el costo real (R/P). En caso en que el costo por unidad es mayor que la productividad es análogo, y las empresas tienen incentivos a reducir el capital hasta que su costo iguale la productividad.

Análogamente, podemos hacer el análisis en términos nominales: el costo monetario de arrendar el capital (R) debe igualar al valor de la productividad marginal del capital ($P \times PMG_K$). Esto se encuentra representado en la figura 4.1, donde K^* representa el stock de capital óptimo.

Como ejemplo podemos considerar una función de producción Cobb-Douglas, es decir,

$$F = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad \text{con} \quad 0 \ < \ \alpha \ < \ 1,$$

de donde se obtiene[1]

$$PMG_K \equiv F_K = \frac{\partial F}{\partial K} = \alpha A \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y}{K}.$$

Por lo tanto, el capital óptimo estará dado por

$$R = P \times PMG_K = P\alpha A \left(\frac{L}{K^*}\right)^{1-\alpha}. \tag{4.2}$$

[1] La última igualdad, $F_K = \alpha Y/K$, es una representación conveniente de la productividad marginal de un factor, y proviene del hecho de que $\alpha A \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} = \alpha \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K}$.

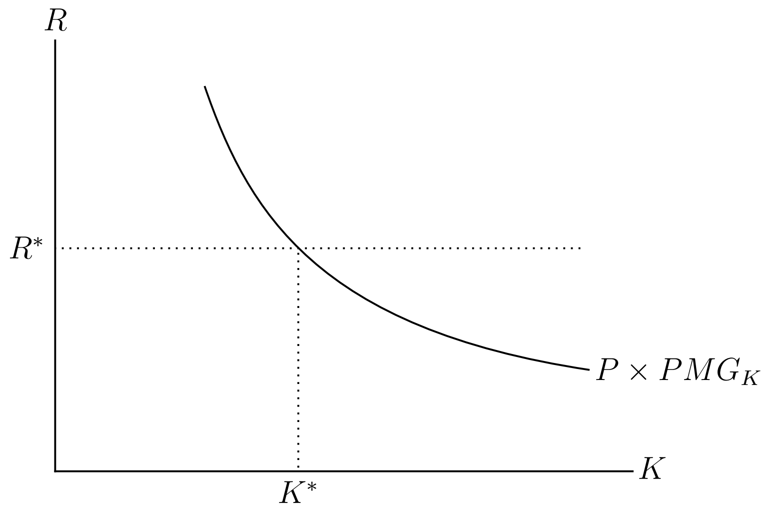

Figura 4.1: Decisión de inversión.

Esto equivale a

$$K^* = L\left(\frac{A\alpha}{R/P}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

En consecuencia,

$$K^* = K^*(\overset{(+)}{A}, \overset{(+)}{L}, \overset{(-)}{R/P}),$$

donde el signo que está sobre cada variable es el signo de la derivada parcial. Es decir, el capital aumenta cuando se eleva la productividad total de los factores (A) o el empleo, y disminuye cuando sube el precio de arriendo del capital.

Alternativamente, y usando el hecho de que en la función de producción Cobb-Douglas la productividad marginal del capital es $\alpha Y/K$, podemos igualarla a R/P, con lo que llegamos a

$$K^* = \alpha\frac{Y}{R/P}.$$

Es decir, un aumento del empleo desplaza la demanda por capital a la derecha, aumentando el capital deseado para cada nivel de costo del capital. Algo similar pasa con aumentos en la producción, ya que son equivalentes a aumentos del trabajo.

4.2. Tasa de interés nominal y real

Para poder determinar el costo de uso del capital tenemos que analizar las tasas de interés. La tasa de interés nominal expresa los pagos en términos monetarios, mientras que la tasa real expresa el costo del presente respecto del futuro en términos de bienes, tal como lo vimos en el capítulo anterior cuando analizamos consumo.

Supongamos que nos endeudamos con un banco a una tasa de interés nominal $i = 7\,\%$ por un monto de \$ 100. Entonces, el interés a pagar sería de \$7. Pero hay que considerar la inflación, π, pues debido a ella el dinero pierde su valor. Lo mismo ocurre con la deuda denominada en pesos. La inflación, que corresponde a la variación porcentual de los precios, está dada por[2]

$$\pi = \frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}. \tag{4.3}$$

Si pedimos prestado al banco al principio del período un monto D, la deuda en términos reales es de D/P_t y al final del período es D/P_{t+1}. En términos de moneda de igual valor a la de principios del período t, la deuda cae de D a $D \times P_t/P_{t+1}$[3]. Este último término es igual a $D/(1+\pi)$. Es decir, la inflación reduce el valor de las deudas expresadas nominalmente.

El pago total por dicha deuda, en términos reales es

$$D\left(\frac{1+i}{1+\pi}\right).$$

La **tasa de interés real** r se define como

$$D(1+r) \equiv D\left(\frac{1+i}{1+\pi}\right). \tag{4.4}$$

De donde obtenemos que

$$1 + i = (1+r)(1+\pi).$$

Resolviendo el producto del lado derecho, tendremos un término $r\pi$, que podemos asumir como de segundo orden, y por tanto podemos ignorarlo. Esto es válido para valores bajos de r y π. Por ejemplo, si la tasa de interés real es

[2] Hay que multiplicar por cien para tener la variación en tanto por ciento. Aquí usamos variación en tanto por uno.

[3] El lector notará que si normalizamos a 1 el índice de precios en t, originalmente P_t, el índice en $t+1$ será P_{t+1}/P_t. Visto de forma equivalente en términos de los precios originales, la deuda real, expresada sobre la base que está medido P_t, caerá de D/P_t a D/P_{t+1}.

3 % y la inflación 4 %, el producto de ambas es 0,12 %, lo que es despreciable[4]. Por ello se usa la siguiente relación para la tasa de interés real y nominal:

$$i = r + \pi. \tag{4.5}$$

Esta es conocida como la ecuación de Fisher, en honor al economista Irving Fisher. Para las decisiones futuras no interesa la inflación pasada, y no conocemos con exactitud la inflación futura, pero sí se puede hacer una estimación (π^e). En consecuencia, se define la tasa de interés real *ex ante*:

$$r = i - \pi^e.$$

Esta no se conoce, y es necesario hacer algún supuesto respecto de cómo calcular π^e. Ésta es la tasa relevante para las decisiones económicas. La tasa de interés que usa la inflación efectiva durante el período se llama tasa de interés real *ex post* y se usa como un aproximado de la tasa *ex ante*. En la práctica, se usa algún método estadístico para generar inflaciones esperadas y saber cuál es la tasa de interés real *ex ante*, aunque una aproximación fácil consiste simplemente en tomar la inflación efectiva, teniendo en cuenta que se está midiendo una tasa *ex post*. Una alternativa más rigurosa es derivar las expectativas de inflación de la comparación de tasas de interés indexadas a la inflación con tasas nominales, como se discute en el capítulo **??**.

4.3. El precio de arriendo del capital (costo de uso)

Si hay un mercado competitivo por arriendo de bienes de capital, el precio al que se arrienda debería ser igual al costo por usarlo.

Analicemos el costo de usar capital en un período. Suponga que una empresa compra una unidad de capital a un precio, denominado en unidades monetarias, P_k. El costo de no disponer de esos recursos que podrían depositarse (o el costo financiero, si el bien se compra con una deuda) es de iP_k. El bien de capital se deprecia a tasa δ (o bien, a un $100 \cdot \delta$ %), por tanto el costo por depreciación es δP_k. Finalmente, el precio del bien de capital al final del período podría pasar de $P_{k,t}$ a $P_{k,t+1}$, pudiendo subir o bajar. Si el bien sube, la empresa tiene una ganancia por unidad de capital de $\Delta P_k \equiv P_{k,t+1} - P_{k,t}$. En consecuencia, el costo (real) de uso del capital será de

$$R = P_k \left(i + \delta - \frac{\Delta P_k}{P_k} \right), \tag{4.6}$$

[4] En general, $(1+x)(1-y)/(1+z)$ lo aproximaremos a $1+x-y-z$. Para más detalles ver nota **??** del capítulo **??**.

donde se descuentan del costo de uso la **ganancia de capital**. Por ganancia de capital se entiende el retorno que proviene del mayor valoración de un activo.

Supongamos por un momento que $\Delta P_k/P_k = \Delta P/P = \pi = \pi^e$; es decir, el precio del capital cambia en la misma proporción que el nivel general de precios (la inflación), y es igual a la inflación esperada. Entonces, por la ecuación de Fisher, (4.5), el costo de uso está dado por

$$R = P_k(r + \delta). \tag{4.7}$$

Ahora bien, si hay un cambio de precios relativos, tenemos que a nivel agregado $i = r + \pi$. Entonces,

$$R = P_k\left(r + \delta - \left[\frac{\Delta P_k}{P_k} - \pi\right]\right). \tag{4.8}$$

El último término se refiere a un cambio de precios relativos: si la inflación sube más rápidamente que el precio de los bienes de capital, la empresa tiene un costo adicional a r y δ, pues el bien de capital se vuelve relativamente más barato. Lo contrario ocurre cuando la inflación está por debajo del aumento de los precios de los bienes de capital, en cuyo caso el valor relativo de los activos de la empresa sube. Esta es una ganancia de capital en términos reales. Es decir, el capital vale más en términos de bienes.

Nótese que la derivación del costo de uso del capital es independiente de la unidad en que se contrata el crédito. Aunque anteriormente vimos que si la empresa se endeuda nominalmente a i, podemos pensar que la empresa se endeuda a una tasa indexada r[5], o en otra moneda. En la medida en que las tasas de interés estén debidamente arbitradas, dará lo mismo la unidad en que se endeuda. Con incertidumbre habrá una decisión de portafolio más compleja, pero en principio el costo de uso del capital es el mismo, independientemente de la unidad de cuenta.

A continuación, veremos el caso de contratar un crédito indexado a la inflación. Suponga que el valor de la unidad indexada (UI) al principio de t es, por normalización, 1 y la empresa compra K unidades de capital a $P_{k,t}$, que es igual en unidades monetarias y UI. La empresa se endeuda. Al final del período, tendrá que pagar en UI una cantidad igual a $(1 + r)P_{k,t}K$. Supongamos que vende el bien de capital al final del período. La venta la hace a $P_{k,t+1}K(1-\delta)$, en pesos, lo que además considera que el capital se deprecia. La UI al final del período será igual a UI(inicial)$(1 + \pi)$, pero por normalización, hemos tomado la UI inicial igual a 1. En consecuencia, la venta final será equivalente a $P_{k,t+1}K(1 - \delta)/(1 + \pi)$, lo que se puede escribir como

[5] Suponemos de nuevo que no hay diferencias entre inflación esperada y efectiva, de modo que r es una tasa real *ex ante* y *ex post*.

$$\frac{1 + \Delta P_k / P_{k,t}}{1 + \pi} P_{k,t} K(1 - \delta) \approx \left(1 + \frac{\Delta P_k}{P_k} - \delta - \pi\right) P_{k,t} K. \tag{4.9}$$

Esto es lo que recibe al final, que restado del costo $(1 + r)P_{k,t}K$, da exactamente la ecuación (4.8) para el costo de uso del capital. Por tanto, independientemente de la denominación del crédito, y en un mundo donde no hay incertidumbres sobre la inflación, da lo mismo si la empresa se endeuda en pesos o toma un crédito indexado.

4.4. Del stock de capital deseado a la inversión

Lo que observamos en la realidad es que las empresas no se ajustan de inmediato a su nivel deseado de capital, sino que por lo general están invirtiendo, lo que implica que se acercan paulatinamente a su nivel de capital óptimo. La razón detrás de este fenómeno es que las empresas enfrentan costos cada vez que desean ajustar su stock de capital. Es decir, si una empresa desea modernizar su planta y, con ello, aumentar su productividad, primero tiene que detener el funcionamiento de la planta, después capacitar a los trabajadores, luego construir, etc. Debido a la existencia de estos costos de ajuste e irreversibilidades, las empresas ajustan su stock de capital gradualmente al stock de capital deseado, K^*.

En general, una empresa tendrá dos costos asociados en su decisión de capital. Primero está el *costo de estar fuera del óptimo*. Esto es, al no tener un capital al nivel de K^*, las empresas dejan de obtener mayores utilidades, pero también tendrán un *costo de ajustar el capital*, y dependerá de la cantidad que se invierte. Mientras mayor es la inversión, mayor tiende a ser el costo. Más aún: ambos costos *suelen ser* convexos. Es decir, bajo convexidad, el costo de estar fuera del óptimo aumenta más que linealmente mientras más lejos se esté del óptimo. Por su parte, también bajo convexidad, el costo de ajuste aumenta más que linealmente mientras más se invierte. De ser este el caso, el ajuste hacia el capital óptimo será gradual[6].

En la figura 4.2 se muestran tres alternativas de ajuste del capital, suponiendo que en $t = 0$ se produce un cambio en K^*. La primera (I) es cuando no hay costos de ajuste, y en la práctica no habría inversión: el capital se ajusta instantáneamente. La segunda es gradual (II) y la tercera (III) es aún más

[6] Existen también formas no convexas para los costos de ajustes, donde los ajustes óptimos son *abultados* (del inglés: *lumpy*). El modelo más sencillo y ampliamente usado es el propuesto por Calvo (1983) para ajustes de precios. Para mayor detalle sobre inversión bajo costos de ajuste no convexos, ver Dixit y Pindyck (1994). En lo que sigue de esta sección se tratarán los costos de ajuste como convexos.

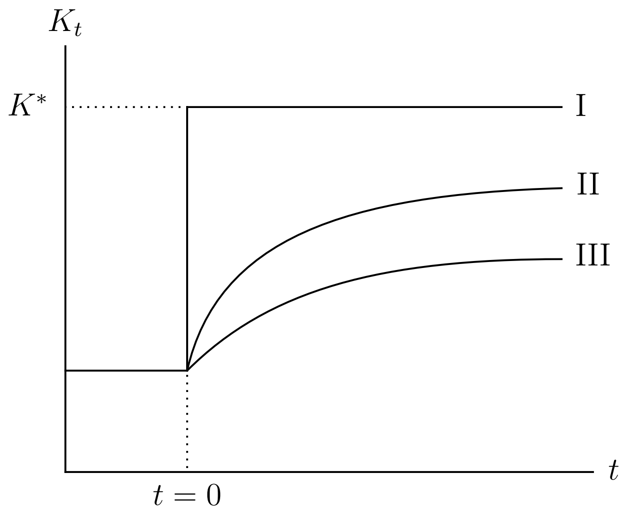

Figura 4.2: Ajuste de capital.

gradual. Mientras más gradual es el ajuste, mayor será el costo de ajuste comparado con el costo de estar fuera del óptimo. Para formalizar esto, podemos pensar en la siguiente función de costo:

$$Costo = \epsilon(K_{t+1} - K^*)^2 + (K_{t+1} - K_t)^2. \tag{4.10}$$

El primer término es el costo de estar fuera del óptimo, y el segundo el costo de ajuste. La empresa parte con K_t y conoce K^*. Entonces debe decidir K_{t+1}, de modo de minimizar costos. Realizando la minimización, es fácil verificar que la inversión neta en el período t es[7]

$$I = K_{t+1} - K_t = \lambda(K^* - K_t), \tag{4.11}$$

donde $\lambda = \frac{\epsilon}{\epsilon+1}$. El parámetro λ es igual a la fracción de lo que se ajusta el capital con respecto al ajuste necesario para llegar al óptimo, y $0 \leq \lambda \leq 1$. Si $\lambda = 0{,}5$, entonces en cada período se ajusta la mitad de la brecha. Es fácil ver, además, que para ϵ cercano a 0, λ es también cercano a 0. En este caso, el costo de estar fuera del óptimo es muy bajo respecto del costo de ajuste, de modo que este es muy gradual. Por otro lado, si ϵ es muy grande, el ajuste es mucho más rápido, pues el costo de ajuste pasa a ser muy bajo respecto del costo de estar fuera del óptimo.

Nótese que hemos derivado una ecuación para la inversión neta. Podríamos, alternativamente, pensar que el costo de ajuste depende del capital que

[7] La condición de primer orden es $\epsilon(K_{t+1} - K^*) + K_{t+1} - K_t = 0$, que después de despejar la inversión da (4.11).

existiría de no haber ningún tipo de inversión, es decir, de $K_{t+1} - (K_t - \delta K_t)$ como segundo término en la expresión (4.10). En este caso, tendríamos una ecuación del tipo de (4.11), pero para la inversión bruta en vez de la inversión neta.

Debe destacarse, además, que el ajuste depende de λ, pero también de cuán lejos se está del óptimo. Si K_t es muy bajo, entonces deberá aumentar la inversión para alcanzar K^*. Por ejemplo, después de un terremoto aumenta I para recuperar el capital perdido. Por otro lado, si sube la tasa de interés, K^* cae y, por lo tanto, se frena la inversión.

Por último, hay que notar que K^* es el capital deseado en ausencia de costos de ajuste. Hemos simplificado el análisis al no considerar la decisión conjunta: capital deseado y velocidad de ajuste. De hecho, resolvimos el problema de la firma de manera secuencial: primero determinamos el capital óptimo, y luego el ajuste óptimo. En un modelo más general y riguroso, estas decisiones deberían ser tomadas simultáneamente, como veremos en la sección 4.8.

4.5. Evaluación de proyectos y teoría q de Tobin

En la práctica, las empresas no calculan directamente K^*. Esto es una simplificación de la conducta de las firmas; sin embargo, es una aproximación razonable que, como veremos aquí, podemos fundamentar sobre la base de la evaluación de proyectos. Para tomar decisiones de inversión, las empresas evalúan proyectos. Esto inmediatamente da una dimensión de indivisibilidad a las decisiones de inversión que no abordaremos, aunque comentaremos más adelante. Asimismo, en esta sección ligaremos la práctica de las empresas con la teoría de la inversión.

Suponga que una empresa decide comprar un bien de capital (invertir en un proyecto) a principios del período por un precio de P_k. Este bien (proyecto) le producirá un flujo de utilidades de z_j para todo j desde $t+1$ en adelante. Por ahora asumimos que no hay incertidumbre. La decisión dependerá del costo del proyecto, comparado con el valor presente de sus utilidades. El valor presente de la utilidad neta a partir del período $t + 1$ es

$$VP = \frac{z_{t+1}}{1 + r_{t+1}} + \frac{z_{t+2}}{(1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})} + ... \tag{4.12}$$

Esto corresponde al valor presente de los flujos z_j para $j > t$.

¿Cómo decide una empresa si invertir o no en un bien (proyecto) cuyo costo es P_k? Pues la empresa invertirá solo si

$$VP \geq P_k, \tag{4.13}$$

es decir, si la utilidad esperada de la inversión es mayor que el costo de adquirir el capital. Así, esta relación nos dice que conviene invertir si los beneficios actualizados, VP, son mayores que los costos P_k. En otra palabras, si el VAN (valor actualizado neto del proyecto) es mayor o igual a 0.

Es necesario destacar, además, que al arrendar o comprar el capital, la empresa puede endeudarse. Si no hay costos de transacción, y las tasas de interés a las que se presta o pide prestado son iguales, debería dar lo mismo arrendar o comprar, pues P_k debería ser igual al valor presente de arrendar el capital, más su valor residual.

A partir de lo anterior, podemos pensar entonces en la determinación de la inversión agregada en la economía. En el agregado existen muchos proyectos, pero solo se invierte en aquellos en los que se cumple (4.13). Suponga que cada proyecto es de magnitud unitaria y ordene todos los proyectos según su VP. El proyecto 1, con valor presente VP_1, es el más rentable, el proyecto 2, con valor presente VP_2, es el que le sigue, y así sucesivamente. Habrá entonces, un proyecto marginal Ω con valor presente $VP_\Omega = P_k$. Ese y todos los proyectos i con $i < \Omega$ se realizarán. Por tanto, la inversión total será[8]

$$I = \Omega.$$

Una primera consecuencia de este análisis es que, al igual que la demanda por capital —ya discutida en la sección 4.1—, un aumento en la tasa de interés reduce la inversión, pues reduce el VAN de todos los proyectos. Por tal razón, el valor de Ω que satisface $VP_\Omega = P_k$ bajará. La razón es que la inversión se realiza en el presente y los beneficios llegan en el futuro; estos son descontados por la tasa de interés. Un alza en la tasa de interés reduce el valor presente de los flujos futuros.

Usando esta idea de valor de un proyecto de inversión —o más bien el valor del capital—, surge la teoría de q de Tobin (1969)[9], que formaliza la condición que se debe cumplir para que una firma invierta. La teoría postula que una firma invierte cada vez que

$$q = \frac{VP}{P_k} \geq 1, \tag{4.14}$$

donde q se conoce como la ***q* de Tobin**. Si esta fuera una empresa con acciones en la bolsa, entonces q sería el valor de cada unidad de capital: VP es el valor económico del capital y P_k es su "valor de reposición", o sea lo que cuesta

[8] Obviamente si los proyectos no son unitarios y cada uno es igual a κ_i, la inversión agregada será $\sum_{i=1}^{\Omega} \kappa_i$.

[9] James Tobin se ganó el premio Nobel de Economía en 1981 "por su análisis de los mercados financieros y su relación con las decisiones de gasto, empleo, producción y precios". Una de estas contribuciones es la que aquí se discute.

comprar el capital. Mientras q sea alto, conviene comprar el capital. Hay que realizar todos los proyectos hasta que $q = 1$; esto es, hasta que el VAN sea 0. Tal como se discutió anteriormente, una consideración adicional importante es la existencia de costos de ajuste. Esto explica por qué no se llega a un q de 1 instantáneamente, como veremos con más detalle en la sección 4.8.

Una consecuencia interesante de entender el valor de las acciones como el valor económico (estimado por el mercado) de las empresas es que el precio de las acciones puede ayudar a predecir el ciclo económico. Los z estarán relacionados con las utilidades y, por lo tanto, con el estado de la economía. Si el mercado prevé que viene una recesión, donde las ventas y utilidades se resentirán, el precio de las acciones comenzará a bajar, o al menos su crecimiento se desacelerará.

Es importante relacionar el análisis de evaluación de proyectos con la teoría microeconómica del stock de capital óptimo discutida anteriormente. Eso es lo que se hace a continuación. Considere que el bien de capital se usa para producir una cantidad Z de un bien que se vende a un precio P. El bien de capital se deprecia δ por período, de modo que en cada período Z cae una fracción δ. Además, suponemos que el precio del bien aumenta con la inflación π. Supondremos también que el bien se empieza a producir y vender al final del primer período, cuando ya ha habido inflación (esto solo se hace para simplificar las fórmulas) y la tasa de interés *nominal* es constante e igual a i. Nótese que usamos tasa de interés nominal porque los flujos son nominales; en la fórmula (4.12) usamos la tasa real, ya que z se medía en términos reales. El VAN del proyecto es[10]

$$\begin{aligned}
\text{VAN} &= -P_k + \frac{PZ(1+\pi)}{1+i} + \frac{PZ(1+\pi)^2(1-\delta)}{(1+i)^2} + ... \\
&= -P_k + \frac{PZ}{1+r} + \frac{PZ(1-\delta)}{(1+r)^2} + ... \\
&= -P_k + \frac{PZ}{(1+r)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\delta}{1+r}\right)^s \\
&= -P_k + \frac{PZ}{r+\delta}.
\end{aligned}$$

Con esto llegamos a que el proyecto se hace si

$$P_k \leq \frac{PZ}{r+\delta}.$$

La empresa realizará la inversión hasta que llegue a la igualdad. Más aún, podemos suponer que Z depende del capital. La variable Z es la producción de

[10] Para derivar esta expresión se usa el hecho de que $(1+\pi)/(1+i) = 1/(1+r)$.

esta unidad adicional (marginal) de capital, de modo que Z es la productividad marginal del capital, y es decreciente con K. Es decir, las unidades adicionales generan cada vez menos producción adicional. Por tanto, llegamos a nuestra ya conocida relación que determina el capital deseado:

$$PMG_K = \frac{P_k}{P}(r + \delta). \tag{4.15}$$

Esta es la ecuación del capital óptimo derivada anteriormente (ver ecuación (4.2)). Por lo tanto, el análisis sobre el capital óptimo es análogo al enfoque tradicional de evaluación de proyectos.

4.6. Incertidumbre e inversión

El análisis de los efectos de la incertidumbre sobre la inversión ha sido particularmente complejo, debido a las complicaciones matemáticas. Pero también ha sido complejo debido a que sus primeras consecuencias eran difíciles de entender. Si se lee la prensa o se pregunta a gente del mundo de los negocios, por lo general esta dirá que la incertidumbre es mala, pues reduce la inversión. La teoría, en principio, dice lo contrario. Hartman (1972), y después con más generalidad Abel (1983), han mostrado que la teoría microeconómica básica predice que a mayor incertidumbre mayor es la inversión. Más precisamente, si aumenta la varianza de la productividad, aumenta la inversión. La razón es técnica y se debe a que la función de utilidad es convexa con lo cual un aumento de la incertidumbre en la productividad aumentarían los incentivos a invertir.

Sin duda resulta paradojal este resultado, al menos a la luz de la discusión cotidiana. La evidencia empírica también reafirmaría el hecho de que mayor incertidumbre deprime la inversión. En consecuencia, debemos preguntarnos cómo adaptar la teoría para hacerla más realista. Técnicamente se trata de hacer la utilidad cóncava de modo que la incertidumbre deprima la inversión.

La literatura ha discutido varias razones por las cuales la relación inversión-incertidumbre puede ser negativa. A este respecto cabe mencionar cuatro:

- **Empresarios aversos al riesgo.** Si los inversionistas son aversos al riesgo —es decir, la utilidad del empresario es cóncava—, quiere decir que ellos harán la inversión siempre y cuando $U(VP)$ sea mayor que el costo de invertir, donde U es una función cóncava y VP el valor presente de la inversión. Obviamente, la convexidad de VP respecto de los precios y la productividad puede revertirse con la concavidad de la función de utilidad. Esto puede ser relevante cuando se trata de empresas de tamaño medio y pequeño en países en desarrollo, donde los beneficios de la empresa están muy asociados a la utilidad del empresario, pues ésta constituye la mayor parte de sus ingresos. En el caso de inversiones que se transan en mercados de capitales más profundos, es más difícil apoyar este argumento, debido a que es posible encontrar inversionistas neutrales al riesgo que arbitren las primas por riesgo de los inversionistas aversos al riesgo.

- **Tecnología y competencia.** Si la tecnología no exhibe retornos constantes a escala, o no hay competencia perfecta, es posible que la incertidumbre reduzca la inversión. En ambos casos la "convexidad" de la función de utilidad de las empresas cae. En un ambiente de competencia, las empresas se benefician con las alzas de precio, directamente por el aumento del precio por unidad vendida, e indirectamente por el aumento de la cantidad ofrecida[11]. Sin embargo, este último efecto se reduce cuando la competencia es imperfecta, pues los aumentos de la producción llevan a caídas del precio dado que las empresas enfrentan una demanda con pendiente negativa[12]. Lo anterior amortigua los incentivos a invertir cuando suben los precios. Por su parte, si los retornos a escala son decrecientes, los aumentos del uso de factores elevan la producción menos que proporcionalmente, por tanto también en este caso es posible que la relación entre inversión e incertidumbre sea negativa.

- **Restricciones de liquidez.** Para que las empresas puedan aprovechar los potenciales beneficios de la volatilidad, deben ser capaces de acceder al mercado financiero, pero ello no siempre ocurre. Cuando una empresa sufre restricciones al endeudamiento, no puede realizar todos sus planes, en especial aquellos asociados a proyectos de larga maduración. Es decir, si los proyectos se demoran en entregar sus beneficios —en particular en ambientes de mayor incertidumbre—, las restricciones al endeudamiento pueden ser un factor importante que limite la inversión. A mayor incertidumbre estas restricciones al endeudamiento pueden hacerse más severas.

- **Irreversibilidad de la inversión.** Por lo general, la teoría supone que

[11] Recuerde de microeconomía que las empresas igualan precio con costo marginal, y cuando sube el precio suben la oferta hasta que el costo marginal, que es creciente en la cantidad, iguale al precio.

[12] Para más detalles, ver Caballero (1991), quien muestra que, incluso con irreversibilidades, la competencia perfecta y los retornos constantes a escala podrían generar una relación positiva entre incertidumbre e inversión.

la inversión se puede deshacer, es decir, hay un mercado en el cual la empresa puede vender el capital que tiene. Puede haber costos de ajustar el capital, pero este es simétrico para aumentarlo o reducirlo. Sin embargo, en la realidad este costo es muy asimétrico. En particular, en muchos casos aumentar el capital es fácil, pero deshacerse de él a veces es imposible. Este es el caso de la inversión irreversible. Si la inversión es irreversible, el momento en que se invierte pasa a ser muy importante. El análisis de la inversión irreversible se ha hecho usando la teoría de finanzas de **opciones**. Una opción permite a su tenedor, por ejemplo, comprar un activo a un precio dado durante un lapso, el que establece una fecha de expiración de la opción. Si el precio durante este lapso fuese mayor al que especifica la opción, esta podría no ejercerse nunca. Con la inversión irreversible, se genera un valor de opción. Es decir, postergar una inversión permite mantener la opción a invertir. Una vez que se invierte, el valor de la opción desaparece. Mientras mayor es la incertidumbre, mayor será el valor de la opción, y puede convenir más esperar para invertir. En este caso, en el agregado se pueden materializar menos proyectos de inversión cuando la incertidumbre sube. En todo caso, es necesario destacar que no siempre la mayor incertidumbre generará menos inversión, pero ciertamente la presencia de irreversibilidades ayuda a generar una relación negativa entre inversión e incertidumbre. Visto de otra forma, como las empresas no pueden vender su capital excesivo en caso que sobreinviertan, se puede esperar que las empresas inviertan menos para evitar esta situación. Discutiremos esto con más detalle en la siguiente sección.

4.7. Irreversibilidad de la inversión e incertidumbre

Hemos mencionado la irreversibilidad como un factor que puede explicar por qué la incertidumbre puede inhibir el desarrollo de proyectos de inversión[13]. Esto, además, nos permite tener modelos más realistas para describir la relación entre incertidumbre e inversión. En esta sección ilustraremos cómo la incertidumbre en presencia de irreversibilidad puede retrasar el inicio de los proyectos, lo que resulta en menor inversión.

[13] El libro de Dixit y Pindyck (1994) analiza con detalle la irreversibilidad de la inversión, su relación con la incertidumbre y las opciones. En el capítulo 2 presentan un interesante y sencillo ejemplo numérico. Aquí solo se presenta el argumento más general en forma resumida.

Suponga un proyecto que requiere de una inversión P_k y sus retornos se obtienen al período siguiente. La inversión es irreversible en el sentido de que, en el período subsiguiente, el bien de capital ya no vale nada, pues el proyecto terminó y el capital invertido solo sirve en ese proyecto. En consecuencia, su valor de reventa es 0. El proyecto tiene un retorno z incierto, el que puede tomar dos valores: con probabilidad p su retorno es $\bar{z}$, y con probabilidad $1-p$ es $\underline{z}$, de modo que $\bar{z} > \underline{z}$. Esto aparece descrito en el panel I de la figura 4.3. En 0 se realiza el proyecto, que rinde con incertidumbre el siguiente período, y luego termina sin valor residual.

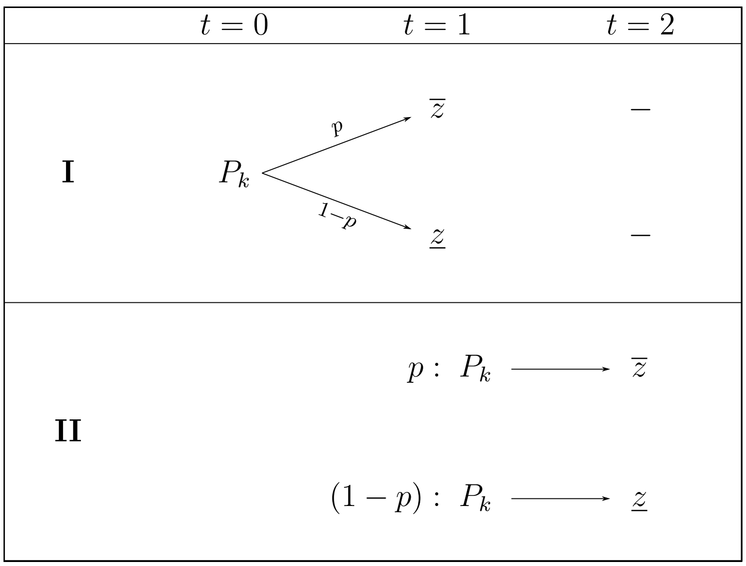

Figura 4.3: Alternativas de inversión.

Asumiremos que el proyecto tiene un valor presente positivo con $\bar{z}$, pero negativo con $\underline{z}$. Esto es,

$$V(\bar{z}) = -P_k + \frac{\bar{z}}{1+r} > 0, \tag{4.16}$$

$$V(\underline{z}) = -P_k + \frac{\underline{z}}{1+r} < 0. \tag{4.17}$$

El valor esperado del proyecto cuando se inicia en $t = 0$, V_I (por ser la estrategia del panel I), será

$$V_I = pV(\bar{z}) + (1-p)V(\underline{z}), \tag{4.18}$$

que asumiremos como positivo. Es decir, estamos analizando un proyecto que es rentable, pero hay un escenario en el cual el beneficio neto es negativo y no convendría hacerlo. Si el inversionista está obligado a hacer la inversión en $t = 0$, la realizará, puesto que V_I es positivo.

Sin embargo, en un caso más realista, podemos pensar que el inversionista puede esperar para desarrollar el proyecto a la espera de que se le revele alguna información relevante que reduzca la incertidumbre. Por ejemplo, considere a un inversionista que desea trabajar con una tecnología moderna, pero aún no consolidada. Tal vez luego de un tiempo se podrá ver si esta tecnología efectivamente tiene éxito. Por lo tanto, podemos pensar, razonablemente, que el inversionista puede también seguir la estrategia del panel II. Es decir, puede esperar a invertir en $t = 1$, momento en el cual sabrá con certeza si se da $\bar{z}$ o $\underline{z}$. Si se da $\bar{z}$ invertirá, pues los retornos son positivos desde el punto de vista de $t = 0$. Sin embargo, si se revela $\underline{z}$ no le conviene invertir, pues el valor presente es negativo. Por lo tanto, el valor esperado en $t = 0$ de posponer la inversión y seguir la estrategia II (V_{II}) a la espera de que se resuelva la incertidumbre es

$$\begin{aligned} V_{II} &= p\frac{V(\bar{z})}{1+r} + (1-p) \times 0 \\ &= p\frac{V(\bar{z})}{1+r}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Con probabilidad p recibe $V(\bar{z})$, aunque descontado con la tasa de interés r. Sin embargo, por otra parte, con probabilidad $1 - p$ recibe 0, en lugar de terminar invirtiendo en un proyecto con pérdidas. De las ecuaciones (4.18) y (4.19) se ve claramente este *tradeoff*. Postergar el proyecto tiene un costo de atraso, dado por el descuento $1 + r$ en (4.19), pero tiene el beneficio de que se ahorra incurrir en la pérdida $V(\underline{z})$ en los escenarios negativos. De hecho si r es relativamente bajo, $1 - p$ alto o $V(\underline{z})$ muy negativo, lo más probable es que $V_{II} > V_I$ por lo cual es preferible esperar. Más incertidumbre, en el sentido de que $\bar{z}$ sube y $\underline{z}$ baja, pero en promedio es el mismo, aumenta el beneficio de esperar, pues el estado malo ahora es peor, y se puede evitar esperando tener más información.

También es posible determinar cuánto está dispuesto a pagar el inversionista por la resolución de la incertidumbre. En $t = 0$, el inversionista pagaría hasta $V_{II}(1 + r) - V_I$ por saber qué valor tomará z. Obviamente, si $V_{II}(1 + r) < V_I$, no conviene esperar ni tampoco pagar por resolver la incertidumbre. En este caso, la combinación de ambos escenarios es lo suficientemente buena como para no preferir esperar.

Este resultado es conocido en finanzas, puesto que invertir representa una **opción.** Un comprador de un bien puede preferir pagar para asegurarse un valor máximo en el precio de compra de un activo. En este caso, compra la opción de adquirir el activo en el futuro a un precio máximo $\bar{x}$. Si al momento de *ejercer* la opción el precio del bien es menor que $\bar{x}$, entonces lo comprará al precio de mercado. En cambio si el precio está por encima de $\bar{x}$, entonces ejercerá la opción comprando el bien a $\bar{x}$[14]. Con la inversión ocurre lo mismo. En nuestro ejemplo, el inversionista "compra" la opción de invertir en el futuro solo si $z = \bar{z}$, y en caso que $z = \underline{z}$ no ejercerá la opción de invertir. Esta opción tiene un valor y en casos más generales podríamos calcularlo usando conceptos de finanzas.

Lo importante desde el punto de vista de la discusión de inversión e incertidumbre es que para un mismo valor esperado, la incertidumbre puede generar el incentivo a esperar a tener más información, retrasando los proyectos de inversión. Si no hubiera incertidumbre, y el proyecto tuviera un retorno cierto de $p\bar{z} + (1-p)\underline{z}$, el inversionista lo hará en $t = 0$. La incertidumbre es la que genera el incentivo a esperar, de modo de despejar las dudas y así tener un mejor retorno esperado.

4.8. Costos de ajuste y la teoría q *

En esta sección estudiaremos más formalmente la teoría q y su relación con los costos de ajuste de la inversión. Esto nos servirá para profundizar nuestra intuición sobre el proceso de inversión y la teoría q. Para esto supondremos que la empresa produce Y_t con una función de producción $f(K_t)$. El precio del bien es P_t. Por otra parte la empresa acumula capital (no arrienda) comprándolo a un precio $P_{K,t}$. Para invertir I_t la empresa no solo debe comprar el capital sino que además debe incurrir en un costo en términos de bienes de capital de $C(I_t)$, donde C es creciente y convexa, y satisface $C(0) = C'(0) = 0$. Es decir, si no invierte, tanto el costo de ajuste como su costo marginal son cero. La utilidad monetaria en cada período t será

$$P_t f(K_t) - P_{K,t}(I_t + C(I_t)).$$

La evolución del capital está dada por

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t.$$

La empresa maximizará el valor presente de sus utilidades monetarias, descontadas a la tasa de interés nominal i, que por simplicidad asumimos

[14] Esta se conoce como una *call option*, que es la que da al tenedor la opción de comprar el activo al emisor a un precio dado (*strike price* o precio de ejercicio). También existen las *put options*, que son aquellas que dan al tenedor de la opción el derecho a vender el activo al emisor a un precio dado.

constante[15]:

$$\max_{\{K_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t}\{P_t f(K_t) - P_{k,t}[K_{t+1} - (1-\delta)K_t + C(K_{t+1} - (1-\delta)K_t)]\}.$$

Para simplificar, supondremos que no hay depreciación, $\delta = 0$. Escribiendo solo los términos donde aparece K_t, tendremos

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{(1+i)^{t-1}} P_{k,t-1}(K_t - K_{t-1} + C(K_t - K_{t-1})) + \\ &+\frac{1}{(1+i)^t}[P_t f(K_t) - P_{k,t}(K_{t+1} - K_t + C(K_{t+1} - K_t))]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Supondremos que el precio relativo del capital respecto del precio de los bienes no cambia en el tiempo, así no tomamos en consideración las ganancias o pérdidas de capital. Es decir, asumimos que $P_{k,t} = P_t$. Además, si dividimos toda la expresión anterior por P_{t-1} y simplificamos por $1/(1+i)^{t-1}$, llegamos a que, para maximizar utilidades con respecto al capital en t, se debe derivar e igualar a 0 la expresión

$$-K_t + K_{t-1} - C(K_t - K_{t-1}) + \frac{1}{1+r}[f(K_t) - (K_{t+1} - K_t + C(K_{t+1} - K_t))],$$

donde, debido a que $1 + i = (1 + r)P_t/P_{t-1}$, hemos usado la tasa de interés real. La condición de primer orden que deben cumplir todos los K debe ser

$$1 + C'(I_{t-1}) = \frac{1}{1+r}[f'(K_t) + (1 + C'(I_t))]. \tag{4.21}$$

Ahora, definiremos q_t de la siguiente forma

$$q_t = 1 + C'(I_{t-1}), \tag{4.22}$$

es decir, corresponde al valor de instalar una unidad de capital K_t[16]. Si no hubiera costos de ajuste, el valor de q sería 1, pues hemos asumido que el precio de los bienes es igual al precio del bien de capital. Sin embargo, la

[15] Este problema de optimización se puede resolver usando las ecuaciones de programación dinámica, pero en este caso usaremos un método más lento pero sencillo. Reemplazaremos las ecuaciones anteriores en la función a maximizar, para obtener una expresión que contenga todos los K_t y no haya restricciones, de modo que el óptimo se encuentra derivando e igualando a 0. Las condiciones de segundo orden para un máximo, que no verificaremos aquí, se cumplen debido a que $f'' < 0$ y $C'' > 0$.

[16] Recuerde que el capital instalado en t se usa para producir en $t + 1$.

presencia de costos de ajuste aumenta el valor del capital, pues una unidad adicional de capital aumenta marginalmente su costo de instalación.

Ahora podemos reescribir la condición de primer orden de la forma

$$r = \frac{f'(K_t)}{q_t} + \frac{\Delta q}{q_t}, \tag{4.23}$$

donde $\Delta q = q_{t+1} - q_t$. Esta relación nos dice que, para mantener una unidad de capital se debe igualar su costo de oportunidad (r ya que no hay depreciación) con el beneficio de tener el capital. El beneficio de tener la unidad de capital está compuesto de su aporte marginal sobre los ingresos más la ganancia de capital, que corresponde al aumento de su valor. Esta es una condición de que no hay posibilidades de arbitraje que veremos repetida en muchos contextos a lo largo de este libro.

Es importante notar que, si la empresa está aumentando su capital ($I > 0$), se tiene que $q > 1$. El proceso de inversión se detendrá cuando $q = 1$. En ese caso, la inversión es 0 y el nivel de capital satisface $f'(K) = r$ que es lo que estudiamos anteriormente en un contexto estático sin costos de ajuste.

Podemos analizar la condición de optimalidad para el capital con mayor profundidad, si la escribimos de la siguiente forma:

$$q_t = \frac{f'(K_t)}{1+r} + \frac{q_{t+1}}{1+r}.$$

Como ya hemos procedido al estudiar el consumo podemos ir reemplazando hacia adelante, partiendo por q_{t+1} y así sucesivamente, para llegar a

$$q_t = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f'(K_{t+s})}{(1+r)^{s+1}}, \tag{4.24}$$

donde hemos asumido que se cumple la siguiente condición de transversalidad:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{q_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} = 0,$$

es decir, si el capital tiene algún valor, traído al presente, se usa completamente.

La ecuación (4.24) nos dice que el valor de una unidad de capital es igual al valor presente de su contribución marginal a los ingresos de la empresa, que dado que no hemos usado trabajo y la empresa es dueña del capital, es igual a la utilidad marginal. Considerando el caso en que K es constante y resolviendo la sumatoria llegaremos a que $q = 1$ cuando $f'(K) = r$, que es el caso en el cual no se invierte más.

En la sección 4.4 estudiamos la inversión como un ajuste gradual al capital óptimo, y para finalizar esta sección es útil explicar las diferencias. Esta sección ha presentado un análisis más riguroso. Si bien el análisis anterior permite entender en términos simples el proceso de inversión, en esta sección el análisis es más general, pues considera simultáneamente el efecto de los costos de ajuste y la decisión de capital óptimo. En el caso anterior, derivamos por separado el proceso de ajuste de la decisión de capital óptimo. Los resultados son similares, pero en este caso hemos sido capaces de entender con mayor profundidad el efecto de los costos de ajuste.

4.9. Dinámica en el modelo q *

A continuación aprovecharemos la formalidad introducida en la sección 4.8 para extender nuestro análisis sobre la teoría q. Para ello, es útil introducir una noción de *dinámica* de la inversión[17].

En una situación de estado estacionario, las firmas no alterarán su nivel de capital ni cambiará el valor presente del capital instalado, por lo que en equilibrio se tiene que

$$\Delta K = 0 \tag{4.25}$$

$$\Delta q = 0. \tag{4.26}$$

Bajo estas dos condiciones es posible estudiar la dinámica hacia el equilibrio de estado estacionario.

Primero veremos la condición de $\Delta K = 0$. En equilibrio y asumiendo, al igual que en la sección anterior, que no existe depreciación se obtiene la inversión será cero, es decir $\Delta K = 0$, cuando

$$q_t = 1. \tag{4.27}$$

como se puede ver de la ecuación (4.22). Esta condición ya fue discutida en la sección 4.8, notando que cuando $q_t > 1$ la empresa invierte, es decir $\Delta K > 0$. Lo contrario sucede cuando $q_t < 1$, pues existe desacumulación de capital, es decir, $\Delta K < 0$. Esta situación puede ser graficada en un diagrama de fases, tal como lo muestra la figura 4.4. En la región sobre (bajo) la recta determinada por la condición de equilibrio del capital (4.27) existen *vientos* positivos (negativos) para el stock de capital, es decir, en esta zona se acumula (desacumula) capital.

Ahora veremos la condición $\Delta q = 0$. Esta se obtiene de (4.23), con lo que se llega a que

$$q_t = \frac{f'(K_t)}{r}, \tag{4.28}$$

[17] Para complementar esta sección con tiempo continuo se recomienda ver Romer (2012) y revisar el apéndice **??**.

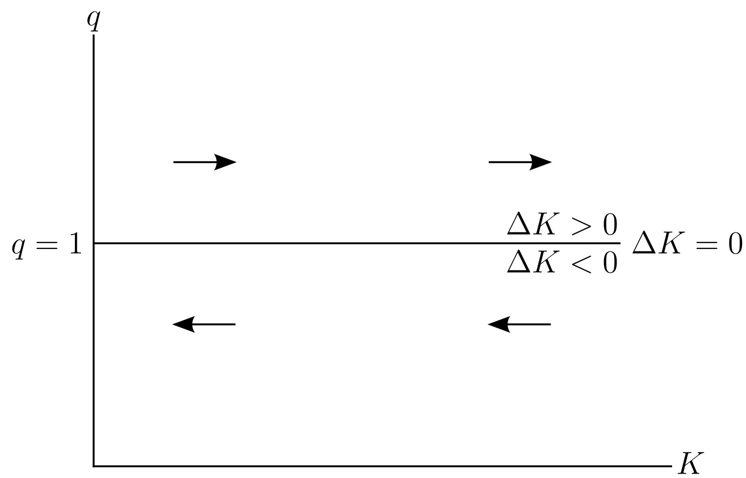

Figura 4.4: Dinámica del capital en equilibrio.

es decir, para que q_t se estabilice es necesario que sea igual a la razón entre la productividad marginal del capital y su costo de arriendo[18]. La intuición detrás de esto es que ante una mayor (menor) productividad marginal del capital, mayor (menor) será el valor presente del capital instalado para la empresa en el equilibrio, y por lo tanto mayor será el valor de q. Lo contrario ocurre con cambios en r.

Como sabemos que $f(K)$ es cóncava, es decir $f'(K)$ es decreciente en K, por la condición (4.28) puede ser graficada tal como se muestra en la figura 4.5.

Para entender los *vientos* de este diagrama de fases, basta con poner atención a la relación descrita por (4.23), donde, para cualquier q_t dado, un aumento (una reducción) en K_t genera que $f'(K_t)$ caiga (crezca) y deba ser compensado con un incremento (una disminución) de Δq para mantener la igualdad con la tasa r constante. Es decir, dado un punto en (4.28), al trasladarse a la zona derecha del plano 4.5 (incrementar K_t) se produce un viento positivo para q_t, mientras que al trasladarse a la zona izquierda (reducir K_t) se generan vientos negativos para q_t.

Al unir los diagramas 4.4 y 4.5 se puede tener una visión completa del equilibrio dinámico. Esto se presenta en la figura 4.6, donde al unir las direcciones de los vientos de K_t y q_t se generan cuatro zonas de interés.

Notamos que la única forma de que se satisfagan las condiciones de equilibrio es que coexistan las ecuaciones (4.27) y (4.28). Sin embargo, llegar a este

[18] Recordar que esto es bajo el caso sin depreciación.

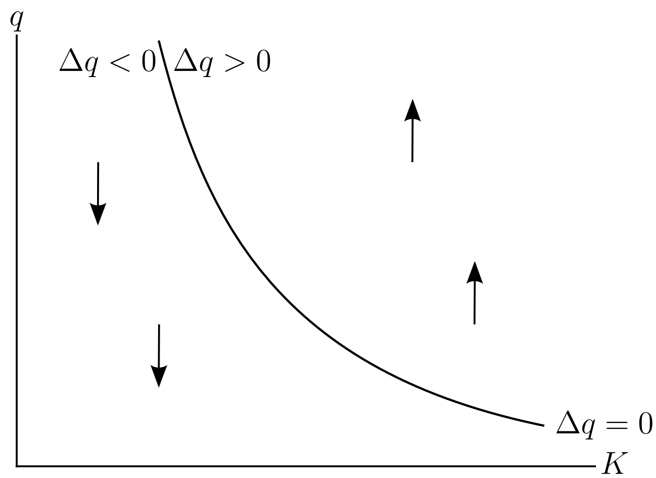

Figura 4.5: Dinámica de la q en equilibrio.

punto único de equilibrio donde se genera el estado estacionario no es trivial, ya que al estar ubicados en las zonas **I** o **III**, los vientos hacen que exista una divergencia, de modo que es imposible acercarse al óptimo. En otras palabras, al estar en la zona **I** (**III**) y por ende tener un nivel de q_t y K_t ambos mayores (menores) que el óptimo, se está en presencia de vientos que hacen que ambos crezcan (caigan) aún más. En otras palabras nunca puede el capital K y su valor q aumentar o disminuir ambos simultáneamente, o sea la trayectoria de equilibrio no puede tener pendiente positiva.

Por otro lado, al estar en las zonas **II** o **IV**, existe un único *brazo estable* que permite trasladarse al equilibrio de estado estacionario. Este brazo estable corresponde a la única trayectoria de equilibrio, donde los vientos generan la única trayectoria que conduce al equilibrio.

Así, cualquier par ordenado (K_t, q_t) ubicado en el brazo estable converge al óptimo. Cabe destacar que el brazo estable es una trayectoria única que pasa por estas zonas, de modo que *no todos los puntos* en las zonas **II** y **IV** llevan al equilibrio. Por ejemplo, al estar cerca del borde superior de la zona **IV** y razonablemente a la derecha, los vientos crecientes para q harían que se generara un traspaso a la zona **I**, desde donde se inicia un proceso de divergencia.

Por último, es interesante notar que al llegar al equilibrio dinámico que satisface las ecuaciones (4.27) y (4.28) y se tiene que

$$r = f'(K^*),$$

que fue abordada anteriormente: el costo marginal del capital equivale a su

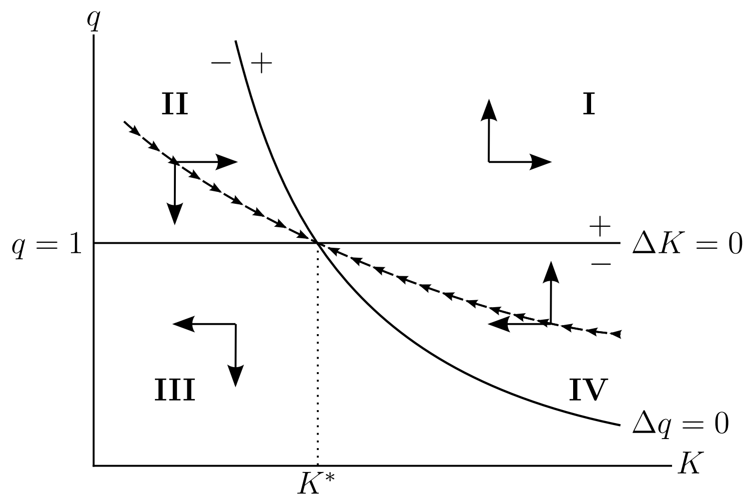

Figura 4.6: Dinámica del capital y la q en equilibrio.

retorno marginal.

Ahora bien, el lector podrá decir que estar sobre el brazo estable es muy improbable. No obstante, este no es el caso, dado que *q puede saltar al brazo estable* ya que es un precio. El capital se ajusta de a poco, nunca puede saltar en un instante de tiempo, pero q lo puede hacer. Esto hace que para cualquier K el valor de q es único y se ubica se sobre el brazo estable. Por ejemplo, suponga que K es inicialmente mayor a K^* y q es igual a 1. Se puede pensar que la economía estaba en un equilibrio que cambió. El nuevo equilibrio es con menor K, a la izquierda de K^*, pero siempre con $q = 1$. En este caso q caerá por debajo de 1 al brazo estable y de ahí el capital disminuirá gradualmente a $K = K^*$ mientras q volverá a 1.

Con este diagrama podremos analizar la dinámica ante distintos cambios. Por ejemplo si la productividad del capital aumenta (suponga que $y = af(K)$ y a aumenta). El lector podrá verificar que la curva Δq se mueve a la derecha, K^* sube. En consecuencia para pasar del equilibrio inicial al final q saltará al nuevo brazo estable, con $q > 1$ y habrá inversión que aumenta el capital. En esta trayectoria q va cayendo a 1. El diagrama de este caso se deja como ejercicio al lector.

4.10. La teoría del acelerador, inventarios y restricciones de liquidez

Hace un siglo atrás, Clark (1917) publicó el primer trabajo que estudiaba la relación entre la demanda de producto (actividad) y la demanda por bienes de capital (inversión), dando origen a la **teoría del acelerador**. Las principales conclusiones que se desprenden de este estudio son las siguientes:

1. La demanda por ampliar los medios de producción (incluido el stock de inventarios) varía no solo con el volumen de demanda de productos finales, sino más bien con la aceleración de esa demanda, por el simple hecho de que no es posible ajustar los medios de producción a la misma velocidad que los cambios de demanda por bienes terminados. Como resultado de lo anterior, se puede dar el caso de que la demanda por inversión disminuya a pesar de que la demanda por productos siga en aumento.

2. Los puntos máximos y mínimos de la demanda de bienes por parte de los productores tienden a preceder a los puntos máximos y mínimos de demanda por productos finales.

3. La demanda de bienes de los productores tiende a variar más fuerte que la demanda por productos acabados, siendo la intensificación proporcional a la vida media de los bienes en cuestión.

Una forma de sencilla de racionalizar matemáticamente lo anterior es asumir una tecnología de proporciones fijas (Leontieff) a partir de la cual se determine el capital deseado K^*:

$$Y_t = \text{mín}\left(L_t, K_t/a\right), \tag{4.29}$$

donde a es una constante y el producto Y_t es exógeno, por lo que no es afectado por las decisiones de inversión. Luego tenemos que

$$K_t = aY_t. \tag{4.30}$$

Asumiendo que no hay depreciación y tomando la primera diferencia de la ecuación (4.30) tenemos que

$$I_t = a\Delta Y_t, \tag{4.31}$$

donde $\Delta Y_t \equiv Y_{t+1} - Y_t$. El capital es proporcional al producto, entonces la inversión es proporcional al cambio en el producto. La inversión es mayor cuando se acelera la tasa a la cual crece el producto. La teoría del acelerador se aplica a toda la inversión, sin embargo, puede resultar útil usarla y explicarla para el caso particular de los inventarios. Podemos interpretar K_t como el stock de inventarios con el que desea partir una firma en el período t. Luego, un aumento de la actividad en el período siguiente generará aumento de inventarios hoy. Cuando estos inventarios suben, tal como veremos cuando analicemos modelos macroeconómicos completos como el modelo IS-LM, la demanda agregada sube lo que genera aumentos del PIB y estos a su vez retroalimentan nuevos aumentos de inversión, lo que genera el proceso acelerador.

Esta teoría nos dice que cuando se *espera* aumentos de actividad los inventarios también aumentan. Pero, por otra parte, si la actividad aumenta *inesperadamente*, los inventarios caerán, pues precisamente para eso existen los inventarios de productos terminados, para hacer frente a aumentos inesperados en la ventas. También son usados para suavizar la producción ante ventas más volátiles. Por lo tanto, no es obvio como interpretar un aumento de inventarios, puede anticipar mejores tiempos porque las empresas prevén mejores ventas o pueden estar absorbiendo una disminución de las ventas. La evidencia muestra una relación negativa entre inventarios y ventas. Es decir, es esperable que en el ciclo las ventas aumentan primero y los inventarios caen. Luego, en la medida que estas ventas se espera continúen, se acumulan inventarios, poniendo mayor fuerza a la demanda y dando paso al acelerador, pero en un primer momento dominaría el efecto de aumento inesperado de ventas.

En las últimas décadas, con los avances en tecnologías de información, transporte y logística, los manejos de inventarios han cambiado de manera importante, permitiendo ahorros relevantes a las empresas, lo cual dificulta aún más la interpretación de los datos.

Las restricciones de liquidez también nos ayudan a explicar la sensibilidad de la inversión a la actividad económica. Si la empresa no tiene acceso pleno al mercado de capitales, la inversión no solo depende del VAN del proyecto, sino también de sus posibilidades de financiamiento, que en el caso de acceso restringido al mercado de capitales dependerá de los flujos de caja actuales, pues parte de la inversión tendrá que financiarse con fondos propios ante las restricciones al endeudamiento.

En consecuencia el nivel de actividad económica también será un determinante importante de la inversión. Si la economía está en auge, habrá mayores flujos de caja y se realizarán más proyectos rentables. Incluso proyectos en los que tal vez convendría esperar se pueden adelantar aprovechando los excedentes de caja de las empresas. Lo opuesto pasaría en recesiones.

Lo importante de considerar restricciones de liquidez es que la inversión será más sensible al nivel de actividad económica, de manera análoga a como ocurre con el consumo.

Al contrastar la ecuación (4.31) con la evidencia empírica se observa un ajuste bastante pobre con los datos, ya que la persistencia de I_t es mucho mayor que la de ΔY_t. La razón es que por lo general la inversión toma tiempo y una forma más adecuada de representarla corresponde a[19]

$$I_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \gamma_j \left(K^*_{t-j} - K^*_{t-j-1}\right) = a \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \Delta Y_{t-j}, \tag{4.32}$$

donde γ_j es un parámetro que permite que la variable que captura el proceso acelerador pueda cambiar a través del tiempo. Agregando un término para capturar la depreciación se estima

$$I_t = a \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \Delta Y_{t-j} + \delta K_{t-1} + \varepsilon_t,$$

que tiene un ajuste bastante bueno con los datos. La teoría del acelerador es una de las primeras teorías de inversión y en consecuencia carece de una serie de elementos que son importantes para construir una teoría de inversión realista. A partir de lo estudiado en este capítulo, sabemos que variables como la tasa de interés, el precio del capital, los costos de ajustes o las expectativas de rentabilidad futura son también determinantes de la inversión.

4.11. Impuestos e inversión

Para discutir los efectos de la política tributaria sobre la inversión empezaremos analizando el efecto de los impuestos sobre el costo de uso del capital. Tal como se presentó antes, es útil pensar que hay empresas que son dueñas del capital y sus utilidades están asociadas a lo que ganan al arrendar el capital (R). Dicha renta está sujeta a un impuesto τ. Dada una tasa de interés real r, una depreciación δ y un impuesto a las utilidades τ, entonces se debe cumplir que

$$(1-\tau)R = P_k(r+\delta).$$

Esta relación dice que las firmas que arriendan el capital tendrán que aumentar el precio de arriendo del capital para cubrir el costo de uso y los impuestos. De hecho $R = \text{costo de uso}/(1-\tau) = P \times PMG_K$.

[19] Clark y col. (1934) y Koyck (1954) son los primeros trabajos en incorporar la noción de fricciones en la inversión.

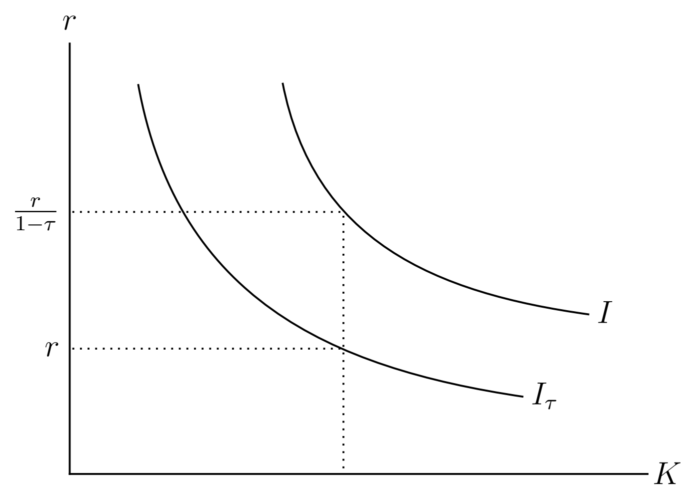

Figura 4.7: Inversión e impuestos.

Tal como muestra la figura 4.7, al agregar un impuesto se requiere una mayor tasa de interés para poder pagar el impuesto, por lo que ante cualquier tasa de interés habrá un menor nivel de inversión[20]. Esto se debe a que la mayor tasa exigida hace que los proyectos en el límite dejen de ser rentables y no se realicen.

Si además agregamos la existencia de un subsidio s por usar una unidad de capital, tendríamos que

$$(1-\tau)\, R \;=\; P_k\, (\mathrm{r}+\delta)\, (1-s),$$

donde s se entiende como una tasa efectiva de subsidio por peso gastado en capital.

Esta es, sin duda, una presentación sencilla, e ignora algunos aspectos importantes en materia de impuestos e inversión. En particular, hemos supuesto que a las empresas que arriendan el capital se les aplica una tasa τ, pero no hemos discutido qué pasa con las empresas que realizan la inversión.

A continuación nos concentraremos en los efectos de los impuestos sobre el stock de capital deseado. Esta es una forma natural de estudiar el efecto de los impuestos en el contexto de las teorías revisadas en este capítulo. Es importante reconocer que un aumento de impuestos no solo reduce los ingresos de las empresas, sino que también sus costos. Simplemente piense en las empresas cuando calculan los VAN de sus proyectos. Si todos los flujos (costos y utilidades) tienen un impuesto parejo de τ, esto no afectará si el VAN es o

[20] La figura 4.7 asume $P = P_k = 1$ y $\delta = 0$.

no cero, ya que VAN$\times(1-\tau)>0$ se cumple independientemente del valor de τ. Tampoco afectará el ranking, y por lo tanto podría no afectar la inversión.

Las diferencias pueden provenir del hecho de que las utilidades económicas de las empresas no son las mismas que las utilidades desde el punto de vista contable, y por lo tanto puede introducir distorsiones[21]. Supongamos una empresa que vende un bien a un precio unitario, que produce con una función de producción $f(K)$, que por simplicidad solo depende del capital, K, y es creciente y con rendimientos decrecientes. El capital se deprecia completamente en un período y la tasa de interés es r. En consecuencia, el costo del capital, asumiendo que su precio también es 1, es $1+r$. Las utilidades “económicas"de la empresa (Π_E) son

$$\Pi_E = f(K) - (1+r)K.$$

Si el sistema tributario midiera las utilidades económicas y les cobrara un impuesto τ a las utilidades, entonces las empresas maximizarían $(1-\tau)\Pi_E$, que es exactamente lo mismo que maximizar Π_E. Por lo tanto, el impuesto a las utilidades no tendría efectos sobre el nivel de capital deseado. En este caso, el capital óptimo estará dado por

$$f'(K^*) = 1+r. \tag{4.33}$$

El problema es que en la realidad las utilidades para efectos contables (Π_C) no son iguales a las económicas. En la práctica, para efectos tributarios, a los ingresos se les descuenta el pago de intereses sobre la deuda incurrida para invertir, pero no se descuenta el costo de oportunidad cuando las empresas usan fondos propios o emiten acciones para financiar la inversión. Asumiremos que la deuda de la empresa es una fracción b del capital total. Es decir, el costo imputable será de rbK y no rK.

Por otra parte está la depreciación. En general, a las firmas se les permite depreciar una fracción d del capital invertido. En nuestro caso, la depreciación económica es 1, pero supondremos que para efectos tributarios la depreciación es d. Como estamos considerando inversión por un solo período, consideraremos que d puede ser mayor que 1. Esto es para contemplar la posibilidad de que haya depreciación acelerada[22] o que haya subsidios a la inversión (*investment tax credits*[23]). Por tanto, el descuento por la depreciación y/o compra

[21] La referencia clásica a este respecto es Hall y Jorgenson (1967). La discusión que aquí continúa sigue el trabajo de Bustos, Engel y Galetovic (2004).

[22] En un caso de más de un período, esto consiste en imputar en los períodos iniciales más de lo que correspondería según la depreciación efectiva del capital.

[23] En la práctica, este mecanismo permite a las empresas que, cuando adquieran el capital, puedan descontar parte del gasto de impuestos, lo que ocurre antes de que se deprecie. Este es otro mecanismo de subsidio al capital, como es el caso de la depreciación acelerada.

del capital será dK. De esta forma, las utilidades contables serán

$$\Pi_C = f(K) - (rb + d)K.$$

Sobre estas utilidades, las empresas pagan τ en impuestos, lo que las hace tener utilidades después de impuestos de $(1-\tau)\Pi_C$. Restando de las utilidades económicas el pago de los impuestos, que corresponden a $\tau\Pi_C$, las utilidades económicas después de impuestos ($\Pi \equiv (1-\tau)\Pi_E$) de esta empresa serán

$$\Pi = (1-\tau)f(K) - (1 + r - \tau(rb + d))K. \tag{4.34}$$

Note que solo en el caso que $b = 1$, es decir, todo el capital se financia con deuda, y $d = 1$, lo que significa que se deprecia contablemente el capital lo mismo que en la realidad, las utilidades contables serán iguales a las económicas y, por lo tanto, el sistema tributario no afectará el capital deseado.

Derivando la ecuación (4.34) e igualando a 0 para determinar el capital óptimo, llegamos a

$$f'(K^*) = \frac{1 + r - \tau(br + d)}{1 - \tau}. \tag{4.35}$$

Si $b = 1$ y $d = 1$, el término $1 - \tau$ se cancela en el numerador y denominador, y la decisión de capital es igual a que si no hubiera impuestos. Claramente, si $d + br < 1 + r$, el capital deseado cuando hay impuestos será menor que el capital sin impuestos, y por lo tanto el sistema tributario y los aumentos de impuestos reducen el capital deseado.

Una manera de incentivar la inversión sería tener $d > 1$, lo que representa la aplicación de depreciación acelerada o un crédito tributario a la inversión.

La inflación también afecta negativamente la inversión. En general, los sistemas tributarios no están indexados, lo que origina que la inflación reduzca la inversión. Por ejemplo, al imputarse la depreciación nominal para la depreciación contable, un aumento de la inflación reduce el valor real del capital que está siendo depreciado, reduciendo los descuentos por depreciación en términos reales. Esto, a su vez, reduce el capital deseado.

Otro aspecto que aquí no discutimos es cómo se determina b, parámetro que hemos supuesto exógeno. En la medida en que endeudarse tiene una ventaja tributaria a usar capital propio, las empresas tendrán un sesgo al elegir su forma de financiamiento a favorecer la deuda por sobre el capital propio que proviene de las utilidades retenidas[24]. Sin embargo, los bancos en general no

[24] De hecho esta es una de las razones por las cuales se plantea que el teorema de Modigliani-Miller (Modigliani y Miller, 1958), una de las proposiciones más famosas en finanzas corporativas, no se cumple. El teorema de Modigliani-Miller plantea que las firmas son indiferentes en la forma de financiar su inversión: si es con deuda o levantando capital.

financiarán el total de la inversión de una empresa, de modo que no podrán elegir $b = 1$. Esto será particularmente válido para empresas pequeñas y con poca historia, que hará a los bancos más conservadores al prestarles. En todo caso los sistemas tributarios son sesgados en favor del financiamiento vía deuda, ya que ella se descuenta de impuestos. Este es un tema relevante en la discusión del exceso de endeudamiento que puede generar inestabilidad financiera en la economía. Idealmente, el sistema tributario debiera ser neutro respecto de como se financia la inversión.

Hemos encontrado algunas condiciones bajo las cuales los impuestos a las empresas pueden no afectar —tal como se repite en las discusiones populares— la inversión. Sin embargo, hay dos elementos muy importantes que matizan este resultado y deben ser tomados en cuenta:

- Este análisis es de equilibrio parcial y considera solo cómo cambia la demanda por capital con los impuestos, sin explorar lo que ocurre con el ahorro, y más en general con la acumulación de capital, cuando los impuestos a las empresas suben. Aunque el ahorro tenga una sensibilidad baja a la tasa de interés actual, los impuestos a las empresas afectan todo el flujo de retornos del ahorro, lo que probablemente reduzca, en equilibrio general, la inversión.

- Tal como discutimos en la sección 4.10, cuando las empresas enfrentan restricciones de liquidez, los flujos de caja —en consecuencia, las utilidades después de impuestos— son importantes determinantes de la inversión[25]. Cuando los impuestos suben, las utilidades de las empresas caen, y por lo tanto, tienen menos recursos disponibles para invertir. Este es un mecanismo adicional a través del cual los impuestos pueden reducir la inversión, por la vía de afectar a las empresas con mayores dificultades para endeudarse. En este caso, los impuestos pueden mantener inalterado el capital óptimo, pero la velocidad de ajuste a dicho capital, es decir, la inversión, se puede ver reducida por aumentos de los impuestos, ya que reducen los flujos de caja.

Referencias

Abel, Andrew B. (1983), "Optimal Investment Under Uncertainty". *American Economic Review* Vol. 73, No. 1, pp. 228-233.

[25] Esto se discute con más detalle en la sección **??**.

Bustos, Álvaro, Eduardo Engel y Alexander Galetovic (2004), "Could Higher Taxes Increase the Long-Run Demand for Capital? Theory and Evidence for Chile". *Journal of Development Economics* Vol. 73, No. 2, pp. 675-697.

Caballero, Ricardo J. (1991), "On the Sign of the Investment-Uncertainty Relationship". *Review of Economic Studies* Vol. 81, No. 1, pp. 278-288.

Calvo, Guillermo A. (1983), "Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework". *Journal of Monetary Economics* Vol. 12, No. 3, pp. 383-398.

Clark, John M. (1917), "Business Acceleration and the Law of Demand: A Technical Factor in Economic Cycles". *Journal of Political Economy* Vol. 25, No. 3, pp. 217-235.

Clark, John M. y col. (1934), "Strategic Factors in Business Cycles". *NBER Books*.

Dixit, Avinash K. y Robert S. Pindyck (10 de ene. de 1994), *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press.

Hall, Robert E. y Dale W. Jorgenson (1967), "Tax Policy and Investment Behavior". *American Economic Review* Vol. 57, No. 3, pp. 391-414.

Hartman, Richard (1972), "The Effects of Price and Cost Uncertainty on Investment". *Journal of Economic Theory* Vol. 5, No. 2, pp. 258-266.

Koyck, Leendert M. (1954), "Distributed Lags and Investment Analysis".

Modigliani, Franco y Merton H. Miller (1958), "The Cost of Capital, Corporate Finance and the Theory of Investment". *American Economic Review* Vol. 48, No. 3, pp. 261.

Romer, David (2012), *Advanced Macroeconomics*. 4th Edition. McGraw-Hill.

Tobin, James (1969), "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory". *Journal of Money, Credit and Banking* Vol. 1, No. 1, pp. pp. 15-29.

Problemas

Problema 4.1. Inversión.

Considere una empresa (o conjunto de empresas) que está considerando invertir en una serie de proyectos. La empresa tiene una gran cantidad de proyectos indizados por j, con j=1, 2, 3 ... (hay muchos proyectos y nunca se llegará al final, así que no se preocupe).

Cada proyecto dura un período y contempla una inversión de K unidades de un bien de capital. Las K unidades del bien de capital cuestan al momento de planificación P_0, y se pueden vender al final del proyecto a un precio conocido de antemano e igual a P_1 (todo está medido en unidades reales para ignorar la inflación). La tasa de interés real es igual a r por período. Cada proyecto genera un retorno de V_j, donde los V_j están ordenados de modo que $V_1 > V_2 > V_3 > ....$ Para ser más explícitos, suponga que $V_j = v/j$. Responda:

(a) ¿Cuál es la inversión total si se realizan los j proyectos más rentables? Tome j como dado para responder esto.

(b) Dados los parámetros anteriores, y suponiendo que $P_0 > P_1/(1 + r)$, determine el valor de j (ignore problemas de que el valor es un entero y puede suponer una variable continua) del último proyecto que conviene realizar. ¿Cuál es la inversión en este caso?

(c) Discuta qué ocurre si $P_0 < P_1/(1 + r)$. ¿Le parece razonable? Dé argumentos económicos.

Problema 4.2. Impuestos e inversión.

En este problema analizaremos el impacto de los impuestos sobre la inversión. Suponga que una inversión que se realiza en el período 0 requiere de un gasto de P_K. A partir del período 1, el proyecto produce un bien que se vende a un precio P. En el período 1 produce Z, pero luego el bien de capital se deprecia a una tasa δ, de modo que en el período 2 se vende $PZ(1-\delta)$, y así sucesivamente para siempre. En el período i, el flujo de venta es $PZ(1-\delta)^{i-1}$. La tasa de interés real es r (no hay inflación).

Para su análisis necesitará recordar que

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, \tag{4.36}$$

donde $a \in (0,1)$. Usted podrá deducir trivialmente el valor de la suma, si parte desde $i = 1$.

(a) Calcule el valor presente de los flujos de ingresos, como función de P, Z, r y δ. Además, suponga que la empresa tiene los fondos para realizar la inversión ("invierte con fondos propios", por ejemplo utilidades retenidas). ¿Cuál es el VAN del proyecto y cuál la condición para que la inversión se realice (VAN>0)?

(b) Suponga que la empresa no tiene los fondos y se endeuda a una tasa r, y paga intereses rP_K a partir del período 1 hasta el infinito. Demuestre que en valor presente paga exactamente el valor del bien de capital (de otro modo el banco tendría pérdidas o utilidades, inconsistentes con un supuesto simple de competencia). Ahora muestre que el VAN, y por lo tanto la decisión de inversión, es exactamente la misma que si se financia con fondos propios, y por lo tanto, comente si hay diferencias acerca de cómo financiar la inversión.

(c) Suponga que hay impuesto, a una tasa τ, a los flujos de caja de las empresas (utilidades contables por período). Esta empresa se endeuda para financiar la inversión. Calcule el VAN de este proyecto y demuestre que la decisión de realizar —o no— la inversión no cambia respecto de los casos anteriores.

(d) Considere ahora el caso de que la empresa invierta con fondos propios y el sistema tributario sea tal que, si tiene flujos negativos, se le da un crédito tributario; es decir, si los impuestos son negativos, se paga al inversionista lo que corresponde por impuestos. Demuestre que, en este caso, el sistema tributario sigue siendo neutral, ya que la decisión de inversión no cambia.

(e) Suponga de nuevo el pago con fondos propios, pero esta vez no hay crédito tributario, sino que se permite al inversionista descontar la depreciación. Sigue el impuesto τ a las utilidades contables. Suponga que el inversionista puede descontar de utilidades en cada período una fracción δ del valor del capital. En el período 1 descuenta δP_K. Luego, descuenta δ de lo que queda, es decir $\delta(1-\delta)P_K$. Así, en el período i descuenta $\delta(1-\delta)^{i-1}P_K$.

   (a) Demuestre que, con este procedimiento, el inversionista termina descontando toda la inversión.

(b) Calcule el VAN del proyecto y demuestre que ahora habrá menos inversión. ¿Por qué? Para facilitar su respuesta, considere qué pasa cuando $r = 0$, y luego qué pasa a medida que r sube.

Problema 4.3. Depreciación, impuestos e inversión.
Considere un inversionista que puede comprar un bien de capital por un valor Q. Este bien le permite obtener un ingreso de Z en el período de compra, y de $Z(1+r)/2$ en el siguiente período[26]. En consecuencia, el capital se deprecia la mitad del total cada período. Al final del período 2, el capital no vale nada, pues se ha depreciado completamente. Suponga que no hay inflación y que la tasa de interés real es r. El inversionista paga impuestos a una tasa τ sobre las utilidades.

(a) Asuma que $r = 0$. Suponga que se le permite depreciar la mitad del valor del capital en cada período. Calcule el valor presente del proyecto y demuestre que la tasa de impuesto es irrelevante en cuanto a la decisión de realizar o no la inversión.

(b) Siga asumiendo que $r = 0$. Suponga ahora que se le permite depreciar aceleradamente el capital, imputando el total de su valor como costo en el primer período. Muestre que el valor presente es el mismo que el del caso anterior y por lo tanto la decisión de inversión es independiente de la forma en que se permite depreciar el capital.

(c) Asuma ahora que $r > 0$. Calcule el valor presente del proyecto bajo las dos formas de depreciación: lineal (un medio-un medio) y acelerada (todo el período 1). ¿En qué caso es más probable que se realice el proyecto? ¿Qué puede decir respecto de la forma en que se tributa la depreciación y la inversión?

(d) ¿Por qué si $r > 0$ o $r = 0$ hace la diferencia? Para responder, calcule el valor presente de los descuentos hechos por la depreciación.

Problema 4.4. Inversión y tasa de interés.
Suponga que el stock deseado de capital viene dado por

$$K^* = \frac{vY}{R}, \tag{4.37}$$

[26] Que sea $Z(1+r)/2$ en lugar de $Z/2$ es solo para facilitar el álgebra.

donde v es constante y R denota el costo real de uso del capital[27].

(a) Suponga que el producto de la economía está fijo en Y^*. Determine si un incremento permanente en la tasa de interés tendrá un efecto transitorio o permanente sobre la inversión. Considere tanto el caso en que no hay costos de ajuste (capital efectivo igual a capital deseado) como el caso en que

$$I_t = \lambda(K^*_{t+1} - K_t),$$

con $0 < \lambda < 1$.

(b) La ecuación de inversión keynesiana supone que $I = I(r)$, con $I'(r) < 0$. ¿Es este supuesto consistente con el resultado de la parte (a)?

(c) Suponga ahora que el producto crece cada período en una cantidad fija, de modo que $\Delta Y = g$. Suponiendo que no hay costos de ajuste, ¿cambia su respuesta a la parte (b)?

Problema 4.5. Inversión e incertidumbre.

Suponemos que la incertidumbre que enfrenta la firma tiene su origen en que al momento de elegir su stock de capital no conoce el salario que pagará a sus trabajadores. En cambio, al momento de contratar los trabajadores, sí conoce el salario. La firma maximiza el valor esperado de sus utilidades. Sus utilidades, como función del capital (K), trabajo (L) y salario (w) vienen dadas por

$$\pi(w,K,L) = 2K^{\gamma/2}L^{1/2} - wL - K,$$

donde $0 < \gamma < 1$ y hemos supuesto que el precio del capital es 1. Además, suponemos que el salario w puede tomar dos valores, ambos igualmente probables: $w_0(1+\alpha)$ y $w_0(1-\alpha)$, donde $0 < \alpha < 1$ captura el grado de incertidumbre (mientras mayor es α, más incierto es el salario que deberá pagar la firma). Nótese también que el salario *esperado* es igual a w_0, es decir, no depende de α.

Muestre que el capital deseado por la firma es una función *creciente* del parámetro α.

[27] Como se vio en el capítulo, un caso particular en que se cumple (4.37) es cuando la función de producción de la firma es Cobb-Douglas. Usamos además la notación en la que R es el costo real del capital, R/P en el capítulo, pero basta suponer que $P = P_k$ y normalizar los precios a 1 para que ambos sean equivalentes.

Problema 4.6. Inversión y costos de ajustes.
Suponga que la demanda por inversión de una economía está dada por la ecuación (4.11), donde el nivel *deseado* de capital K^* es

$$K^* = 0{,}1\frac{Y}{r},$$

donde Y es el producto y r es la tasa de interés real. Se supone que no hay depreciación. Asuma que $R = 0{,}05$, $\lambda = 0{,}25$.

(a) Interprete económicamente el término λ y explique bajo qué condiciones la tasa de interés real es igual al costo de uso del capital.

(b) Calcule el nivel de inversión del año 1, si el producto de ese año es 400 y el stock de capital del período anterior es 400.

(c) Suponga ahora que, debido a un avance tecnológico, el valor de λ aumenta al doble. ¿Cómo cambia su respuesta a la parte anterior?

(d) Dé alguna intuición económica acerca de por qué su respuesta no es la misma en las partes (b) y (c).

Problema 4.7. Irreversibilidad y el beneficio de esperar.
Considere un proyecto de inversión que requiere invertir 100 hoy día. Una vez realizado el proyecto, este rinde un flujo F el período siguiente, y después se acaba el proyecto y el valor residual es 0. Suponga una tasa de interés por período es constante e igual a 10 %.

(a) Si el proyecto da un retorno cierto F igual a 130, calcule el valor esperado y diga si conviene o no hacerlo. ¿Conviene postergar el proyecto?

(b) Suponga ahora que el proyecto tiene un retorno incierto, con un retorno de 180 u 80, ambos con la misma probabilidad (1/2 por supuesto). ¿Cuál es el valor presente esperado de invertir?

(c) Suponga que el inversionista espera un período a "que se resuelva la incertidumbre"; es decir, sabrá en el siguiente período si los retornos futuros serán 180 u 80 (por ejemplo, se puede observar si un producto logrará ser exitoso)[28]. ¿Cuál es el valor presente si ocurren los flujos altos de 180? ¿Y cuál si ocurren los flujos bajos? ¿Qué hará en consecuencia el inversionista si se revela que los flujos serán bajos?

[28] El inversionista no necesita invertir en el segundo período para saber si los flujos serán bajos o no; solo observa la realidad.

(d) A partir de la respuesta anterior, ¿cuál es el valor presente esperado si se posterga un período la realización del proyecto? ¿Conviene esperar? Discuta su resultado.

Problema 4.8. Inversión e incertidumbre.
Suponemos que la incertidumbre que enfrenta la firma tiene su origen en que al momento de elegir su stock de capital no conoce el parámetro de productividad. En cambio, al momento de contratar los trabajadores, sí conoce el parámetro de productividad. La firma maximiza el valor esperado de sus utilidades. Sus utilidades, como función del capital (K), trabajo (L) y la productividad (A) vienen dadas por

$$\pi(w,K,L) = AK^{\alpha/2}L^{1/2} - wL - K, \tag{4.38}$$

donde $0 < \alpha < 1$, w el salario y hemos supuesto que el precio del capital es 1. Además, suponemos que el parámetro de productividad A puede tomar dos valores, ambos igualmente probables: $A_0(1+\gamma)$ y $A_0(1-\gamma)$, donde $0 < \gamma < 1$ captura el grado de incertidumbre (mientras mayor es γ, más incierto es la productividad de la firma). Nótese también que el parámetro de productividad *esperado* es igual a A_0, es decir, no depende de γ. La empresa decide el capital antes de saber si la productividad es alta o baja. Sus decisiones de demanda de trabajo si las hace conociendo la productividad.

(a) Encuentre la demanda por trabajo cuando la productividad es alta y cuando la productividad es baja.

(b) Muestre que el capital deseado por la firma es una función *creciente* del parámetro γ. (Use el resultado de la parte anterior).