Parte II

Comportamiento de los agentes económicos

Capítulo 3

Consumo

Como vimos en el capítulo anterior (ver cuadro **??**), en promedio el consumo asciende a aproximadamente 65 % de la demanda agregada, y la inversión oscila en torno a 20 %. Para entender la demanda agregada, es fundamental comprender el comportamiento de ambos componentes. En este capítulo y en el próximo nos concentraremos en el consumo y la inversión. Posteriormente, en el capítulo **??** analizaremos al gobierno. En dicho caso, sin embargo, no nos detendremos en los determinantes del gasto de gobierno —que, para efectos prácticos, supondremos como dado por el sistema político—, sino en su impacto sobre la economía, en particular en su restricción de recursos intertemporal.

El modelo de consumo más usado en los modelos más simples de macroeconomía es la conocida función keynesiana y empezaremos por ella. Sin embargo, esta teoría es incompleta, de modo que para entender el consumo y sus implicancias económicas debemos estudiar formulaciones más generales y consistentes con la teoría microeconómica.

La teoría del consumo es de primera importancia en macroeconomía, y así ha sido como tres economistas han ganado el premio Nobel por sus contribuciones, entre otras cosas a la teoría del consumo. Ellos son Milton Friedman en 1976, Franco Modigliani en 1985, y Angus Deaton en 2015. A ellos haremos referencia en este capítulo.

3.1. La función consumo keynesiana

La idea original de Keynes para modelar el consumo —y la que hasta el día de hoy es la más usada en modelos macroeconómicos sencillos, así como en la gran mayoría de textos básicos— es la siguiente:

$$C_t = \bar{C} + c(Y_t - T_t), \tag{3.1}$$

donde C es el consumo; $\bar{C}$ es una cantidad de consumo que se gasta en cada período, independientemente de las condiciones económicas —y en particular del nivel de ingresos—, y el término $Y - T$ es el ingreso disponible (Y^d)[1] que tienen los individuos para consumir y ahorrar después de haber pagado los impuestos (T) con el ingreso total (Y). Muchas veces se usa el hecho de que los impuestos directos son impuestos a los ingresos, de modo que se representan como una proporción del ingreso; por ejemplo: $T = \tau Y$. El subíndice t denota el período t.

El término $\bar{C}$ también se conoce como consumo autónomo. Una forma de racionalizar este consumo es como el consumo de subsistencia que cubre las necesidades básicas. Alternativamente, puede ser interpretado como un consumo mínimo en que la gente incurrirá de todos modos, independientemente de sus ingresos, por ejemplo, debido al acostumbramiento a un nivel mínimo de consumo, el que dependerá, entre otras cosas, de la experiencia de consumo pasada.

La función consumo se encuentra graficada en la figura 3.1.

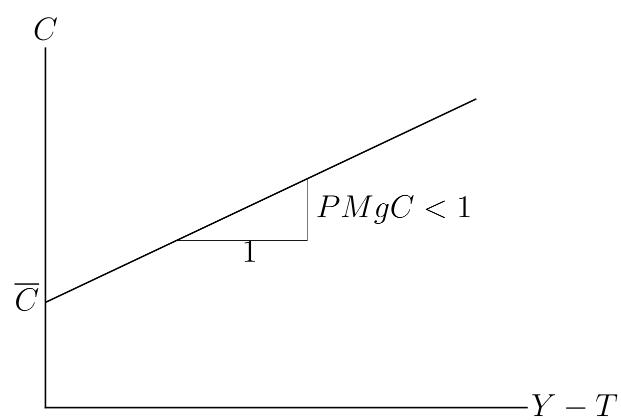

Figura 3.1: Función de consumo keynesiana.

Esta teoría plantea que el principal determinante del consumo en el período t es el ingreso disponible durante dicho período.

En esta formulación lineal, el parámetro c es igual a la **propensión marginal a consumir** (PMgC), que representa cuánto aumenta el consumo si el ingreso disponible se eleva marginalmente en una unidad. El individuo usa su

[1] Suponiendo transferencias $TR = 0$, de otra forma tendríamos que $Y^d = Y - T + TR$.

ingreso disponible para consumir y ahorrar, por lo tanto c es una fracción entre 0 y 1, pues el resto se ahorra. Es decir, si el ingreso disponible sube en \$ 1, el consumo subirá en \$$c$, donde $c \in [0,1]$. Formalmente esto quiere decir que

$$\text{PMgC} = c = \frac{\partial C}{\partial (Y - T)}.$$

Puesto que el ingreso no consumido corresponde al ahorro de los hogares, la fracción $1 - c$ también se conoce como **propensión marginal al ahorro** y se denota como s[2].

Otro concepto importante —y muy fácil de medir en los datos— es la **propensión media a consumir** (PMeC), que representa, simplemente, la fracción del ingreso disponible usada para consumir. Es decir

$$\text{PMeC} = \frac{C}{Y - T}.$$

Se puede verificar que, cuando el consumo está descrito por la función keynesiana (3.1), la PMeC cae a medida que el ingreso disponible aumenta. La PMeC es $c + \bar{C}/(Y - T)$, es decir, converge desde arriba hacia c.

El principal problema de esta función de consumo es que, si bien puede representar adecuadamente períodos relativamente largos, también puede contener muchos errores de predicción en períodos más breves. Dado que las autoridades económicas —así como los analistas y los mercados— desean predecir lo que ocurrirá en los próximos trimestres, la función de consumo muchas veces es incapaz de predecir adecuadamente cambios bruscos. Si queremos tener una teoría que describa bien el mundo, necesitamos explicar con fundamentos sólidos lo que determina el consumo de los hogares y, de hecho, resulta insuficiente decir mecánicamente que es el nivel de ingresos. Además, la evidencia internacional muestra que la propensión media al consumo no parece tener un movimiento secular a la baja, como predice la ecuación keynesiana simple.

Ha sido ampliamente documentado que en algunas experiencias de estabilización —es decir, cuando se han aplicado políticas para reducir la inflación—, el consumo tiende a aumentar aceleradamente, mucho más que el nivel de ingreso. Por ejemplo, en la estabilización de Israel, en 1985, el consumo subió por tres años en aproximadamente un 25 %, mientras que el PIB lo hizo en torno a un 10 %. En algunas ocasiones, el consumo colapsa después, mientras el ingreso se mueve moderadamente. La formulación keynesiana más simple no permite entender estos fenómenos[3]. Esta aceleración del consumo puede tam-

[2] Si consideramos impuestos proporcionales al ingreso, la propensión marginal a consumir con respecto al ingreso total (Y) será $c(1 - \tau)$ y la propensión al ahorro $(1 - c)(1 - \tau)$. Obviamente no suman 1, sino $1 - \tau$, pues una fracción τ se destina al pago de impuestos.

[3] Más antecedentes son presentados en De Gregorio, Guidotti y Végh (1998).

bién ocurrir después de un proceso de reformas exitosos que hace presagiar mejores perspectivas económicas.

En el corto plazo, ocurren fluctuaciones que una relación mecánica entre ingreso y consumo no puede capturar. Por tanto, al menos desde el punto de vista de explicar la realidad, es necesario profundizar más en las teorías de consumo. El hecho de que dos variables: ingreso y consumo, se muevan juntas en el tiempo no dice nada respecto de la causalidad, y nosotros estamos interesados no solo en proyectar —lo que la estadística sin teoría puede hacer bien—, sino en entender los determinantes de las variables macroeconómicas.

Hay otros temas asociados al consumo que no podemos analizar con la función keynesiana, como es por ejemplo la seguridad social. Es por ello que es necesario analizar el consumo con mayor profundidad.

3.2. Restricción presupuestaria intertemporal

La teoría keynesiana es esencialmente estática. No obstante, en la vida real la gente "planifica el consumo". Cuando alguien se endeuda para consumir, de una u otra forma debe considerar que en el futuro deberá pagar su deuda, para lo cual requerirá tener ingresos.

La pieza fundamental de cualquier teoría de consumo es entender la restricción presupuestaria de los individuos. Hay una restricción presupuestaria en cada período: el ingreso, después de pagar impuestos, se tendrá que asignar entre consumo y ahorro. Sin embargo, las restricciones de cada período se relacionan entre sí. Si alguien ahorra mucho hoy, en el futuro tendrá mayores ingresos, pues los ahorros perciben intereses. En este caso se dice que el individuo tiene más ingresos financieros.

Una vez que conocemos la restricción presupuestaria de las personas, es fácil suponer que un individuo determina su consumo de forma de obtener la mayor utilidad posible, dados los recursos que posee. El individuo podrá planificar su consumo sabiendo que no siempre dispone de los recursos en el momento en que los necesita. Pero si el individuo sabe que mañana va a tener los recursos, puede preferir endeudarse hoy. Por el contrario, si tiene muchos recursos hoy y sabe que mañana no los tendrá, le puede convenir ahorrar mucho. Las teorías que veremos más adelante: la del ciclo de vida de Modigliani, y la del ingreso permanente de Friedman, tienen como piedra angular la restricción presupuestaria intertemporal de los individuos.

El primer paso para ver la restricción presupuestaria de los individuos es examinar sus ingresos. Los ingresos totales, antes de impuestos, tienen dos orígenes: ingresos del trabajo (Y_ℓ) (*labor income*) e ingresos financieros. Si a principios del período t el individuo tiene activos netos (depósitos en el banco, acciones, dinero guardado bajo el colchón, etc., menos deudas y todas sus acreencias), representados por A_t, y estos activos le pagan en promedio una tasa de interés r, los ingresos financieros serán rA_t. En consecuencia, los ingresos totales (Y_t) en el período t son[4]

$$Y_t = Y_{\ell,t} + rA_t. \tag{3.2}$$

Por otra parte, el individuo gasta en consumo (C), paga impuestos (T), y acumula activos. La acumulación de activos es $A_{t+1} - A_t$, es decir, parte con A_t, y si sus ingresos totales son mayores que el gasto en consumo más el pago de impuestos, estará acumulando activos: $A_{t+1} > A_t$. *La acumulación de activos es el ahorro del individuo*. Considerando que el ingreso total (laboral más financiero) debe ser igual al gasto total, que incluye la acumulación de activos, tenemos que

$$Y_{\ell,t} + rA_t = C_t + T_t + A_{t+1} - A_t. \tag{3.3}$$

Reescribiendo esta ecuación tenemos la siguiente fórmula que es muy conveniente

$$(1 + r)A_t = C_t + T_t - Y_{\ell,t} + A_{t+1}, \tag{3.4}$$

la que se cumple para todo t. Se debe notar que todas las restricciones presupuestarias están ligadas entre sí. A_t aparece en dos restricciones, en una en compañía de A_{t-1} y en la otra con A_{t+1}[5]. Esto genera una relación recursiva que relaciona todos los períodos. Por otra parte, como pensaremos que los individuos miran al futuro para realizar sus decisiones de gasto, resolveremos esta ecuación "hacia delante", donde todo el pasado a t está resumido en A_t. Los activos en t proveen toda la información relevante del pasado para el futuro. Podríamos resolver esta ecuación también hacia atrás, pero ello sería irrelevante, pues habríamos explicado cómo se llegó a A_t, la variable que resume completamente el pasado. Además, lo que interesa es la planificación futura que hace el individuo de sus gastos —y, después, las empresas de sus inversiones—, y para ello hay que mirar su restricción presupuestaria hacia adelante.

Reemplazando esta ecuación recursivamente, es decir, escribimos (3.4) para A_{t+1} y la remplazamos en la ecuación para A_t, llegamos a

$$(1 + r)A_t = C_t + T_t - Y_{\ell,t} + \frac{C_{t+1} + T_{t+1} - Y_{\ell,t+1}}{1 + r} + \frac{A_{t+2}}{1 + r}.$$

---

[4] Nótese que A puede ser negativo, en cuyo caso el individuo tiene una posición deudora y su ingreso total será menor que su ingreso laboral.

[5] Para notarlo, basta con rezagar la ecuación (3.4) en un período.

En esta ecuación podemos seguir sustituyendo A_{t+2}, luego A_{t+3}, y así sucesivamente, para llegar a

$$(1+r)A_t = \sum_{s=0}^{N} \frac{C_{t+s} + T_{t+s} - Y_{\ell,t+s}}{(1+r)^s} + \frac{A_{t+N+1}}{(1+r)^N}.$$

Si la gente se muere en el período N, no tiene sentido que A_{t+N+1} sea distinto de 0; es decir, no tiene sentido guardar activos para el comienzo del período siguiente a la muerte, pues obviamente conviene más consumirlos antes[6]. Esto no es más que el *principio de la no saciación* en teoría del consumidor. Entonces asumimos que $\frac{A_{t+N+1}}{(1+r)^N} = 0$[7]. Esto dice formalmente que, en valor presente, al final de la vida no quedan activos, aunque en valor corriente de dicho período estos no sean 0.

Finalmente, con este último supuesto, llegamos a

$$\sum_{s=0}^{N} \frac{C_{t+s}}{(1+r)^s} = \sum_{s=0}^{N} \frac{Y_{\ell,t+s} - T_{t+s}}{(1+r)^s} + (1+r)A_t. \tag{3.5}$$

Estas expresiones se pueden escribir para el caso que $N \to \infty$, asumiendo nuevamente que $\lim_{N\to\infty} \frac{A_{t+N+1}}{(1+r)^N} = 0$. En este caso se tiene el equivalente de horizonte infinito de la expresión (3.5):

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{C_{t+s}}{(1+r)^s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{Y_{\ell,t+s} - T_{t+s}}{(1+r)^s} + (1+r)A_t. \tag{3.6}$$

Se podrá reconocer que ambas expresiones representan el valor presente del consumo y de los ingresos del trabajo neto de impuesto. Por lo tanto, estas ecuaciones corresponden a

$$VP(consumo) = VP(Ingresos\ netos\ del\ trabajo) + \textit{Riqueza Física},$$

donde VP denota el **valor presente** de los términos respectivos [8].

---

[6] Una sofisticación realista de este análisis es suponer que los individuos se preocupan por sus hijos y, por lo tanto, cuando pueden, les dejan su riqueza. En esos casos, A_{t+N+1} sería distinto de 0. Otra forma usual en economía de incorporar motivos altruistas es asumir que el horizonte del individuo es infinito; es decir, debido a la preocupación por sus descendientes, el individuo planificará para un período que va más allá de su horizonte de vida.

[7] Se podría pensar que este término sea menor que 0; es decir, el individuo muere endeudado. Suponemos que nadie prestará en estas condiciones. Esto supone que no hay posibilidad de caer en un "esquema de Ponzi", algo que se discute con más detalle en **??**.

[8] Concepto de valor presente (VP): Si estamos en el tiempo cero (0) y existen flujos de

Por último, note que si el individuo "vende" todos sus ingresos futuros le pagarán una suma igual a $VP(Ingresos\ netos\ del\ trabajo)$; por lo tanto, a este término le podemos llamar **riqueza humana**, ya que es el valor presente de todos los ingresos del trabajo: el retorno al capital humano. Por lo tanto, la restricción presupuestaria intertemporal es

$$VP(consumo) = \textit{Riqueza Humana} + \textit{Riqueza Física}.$$

Sin duda esta es una expresión muy simple: el valor presente del total de consumo debe ser igual a la riqueza total; no se puede consumir más allá de ello, y no tiene sentido consumir menos que eso.

3.3. Modelo de consumo y ahorro en dos períodos

3.3.1. El modelo básico

Este es el modelo más sencillo de decisiones de consumo, y en él se puede analizar una serie de temas dinámicos en macroeconomía. Para analizar las decisiones de consumo, suponemos que el individuo vive dos períodos, después de los cuales muere. Sus ingresos en los períodos 1 y 2, respectivamente, son Y_1 e Y_2. Para simplificar asumimos que no hay gobierno en esta economía.

El individuo maximiza la utilidad del consumo en ambos períodos:

---

recursos en períodos posteriores, debemos notar que el flujo de cada período t no tiene el mismo valor en el presente. Si consideramos una tasa de interés r constante (precio relativo entre el consumo hoy y el consumo mañana), debemos actualizar cada uno de estos flujos con esta tasa r. Una unidad del bien dejada para el siguiente período se transforma en $1+r$ unidades del bien, es decir, 1 hoy es lo mismo que $1+r$ mañana. En consecuencia, una unidad del bien mañana equivale a $1/(1+r)$ del bien hoy. De manera que para actualizar un flujo futuro en el siguiente período debemos dividirlo por $1+r$. Para actualizar un flujo dos períodos más adelante, hay que traerlo un período adelante, es decir dividir por $1/(1+r)$, y de ahí al presente hay que dividir por $1/(1+r)^2$. Por lo tanto, el valor presente de una secuencia de flujos F_t está dado por

$$VP(flujos) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{F_t}{(1+r)^t}.$$

Es fácil derivar que en el caso más general en que las tasas de interés fluctúan, donde r_t es la tasa vigente en el período t, tenemos que el valor presente está dado por

$$VP(flujos) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{F_t}{\prod_0^t (1+r_t)}.$$

$$U = U(C_1,C_2), \tag{3.7}$$

donde la función de utilidad es creciente en cada uno de sus argumentos, es decir U_{C_1} y U_{C_1} son positivas, y con utilidad marginal decreciente, es decir ${U^2}_{C_1}$ y ${U^2}_{C_1}$ son negativas. Un caso importante es de la utilidad *separable en el tiempo*[9]

$$u(C_1) + \frac{1}{1+\rho}u(C_2), \tag{3.8}$$

donde ρ es la tasa de descuento. La **tasa de descuento** es una tasas subjetiva a la que se descuenta la utilidad futura. En este caso las condiciones sobre la función se resumen en $u' > 0$ y $u'' < 0$. La segunda condición es la concavidad de la función de utilidad en todos los consumos. Esta concavidad significa que el individuo esta interesado en *suavizar el consumo* a lo largo de su vida. Técnicamente esto significa que $u((C_a + C_b)/2) > (u(C_a) + u(C_b))/2$, es decir la utilidad promedio del consumo promedio es mayor a la utilidad del consumo promedio. Esto explica por qué la curva de indiferencia entre C_1 y C_2 es convexa.

En el primer período la restricción presupuestaria es

$$Y_1 = C_1 + S, \tag{3.9}$$

donde S representa el ahorro (si $S > 0$ el individuo ahorra, y si $S < 0$ se endeuda). Note que el individuo nace sin activos, de modo que no hay ingresos financieros en el primer período[10]. El individuo muere en el período 2, por tanto para él resultaría óptimo consumir toda su riqueza; es decir, consumir todo el ahorro en el segundo período. La restricción presupuestaria en el segundo período es

$$C_2 = Y_2 + (1 + r)S. \tag{3.10}$$

Despejando S de (3.9), que es la variable que liga las restricciones presupuestarias estáticas en cada período, y reemplazándola en (3.10) llegamos a la restricción presupuestaria intertemporal

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r}. \tag{3.11}$$

[9] Esto significa que la utilidad en cada período es independiente de los consumos en otros períodos.

[10] Según la notación de la sección anterior, $S = A_2 - A_1$, donde A_1 es 0, ya que el individuo parte su vida sin activos. Si se quisiera considerar que el individuo nace con activos, es equivalente a agregárselos a su ingreso en el primer período.

Esta es una versión de dos períodos de la restricción (3.5). En la figura 3.2 podemos ver cómo el individuo determina su consumo óptimo mirando al futuro, porque sabe que en el período 2 va a tener ingreso Y_2, por lo tanto puede ser óptimo endeudarse en el período 1 y pagar la deuda en el período 2. El individuo tiene funciones de isoutilidad convexas y elige un consumo tal que la tasa marginal de sustitución entre dos períodos (la razón entre las utilidades marginales) sea igual a la tasa marginal de transformación (1 + tasa de interés) de consumo presente por consumo futuro.

Este simple ejemplo muestra que el consumo del individuo depende del valor presente del ingreso más que del ingreso corriente. Si dependiera solo del ingreso corriente, entonces el consumo del individuo en el período 1 no dependería de Y_2. Sin embargo, este ejemplo muestra que un aumento de X en Y_1 es equivalente a un aumento de $X(1+r)$ en Y_2. Por lo tanto, podría aumentar Y_2 con Y_1 constante, pero nosotros observaríamos en los datos que C_1 aumenta. Esto no lo captura la función keynesiana tradicional. El consumo depende del valor presente de los ingresos (V) no de los valores específicos del ingreso en 1 y 2.

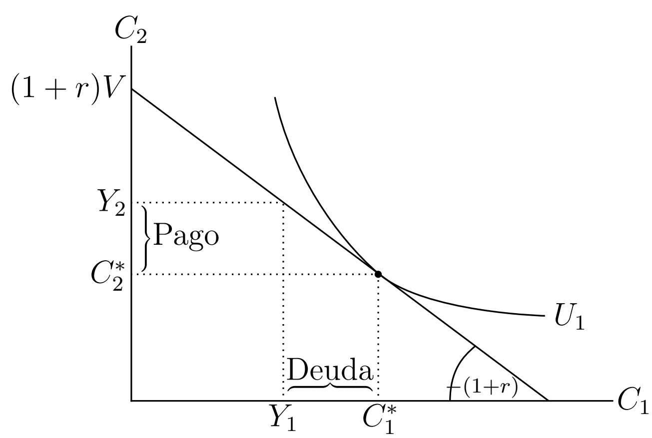

Figura 3.2: Maximización de utilidad en el modelo de dos períodos.

Debido a que la función de utilidad del consumo en un período es cóncava, lo que da da la curva de indiferencia de la figura convexa, el individuo prefiere consumir de forma más pareja, sin grandes cambios entre períodos. Es decir, no es lo mismo consumir Z en un período y Z en el otro, que consumir $2 \times Z$ en un período y 0 en otro. De aquí la idea básica en todas las teorías de consumo de que el *individuo intenta suavizar el consumo sobre su horizonte* *de planificación.*

Con este modelo podemos explicar por qué el consumo crece más allá de lo "normal" después de que se aplican programas de estabilización exitosos. Una razón potencial —en particular en aquellos casos en los cuales la estabilización tiene un éxito duradero— es que el público percibe que como producto de un mejor ambiente macroeconómico habrá progreso, y sus ingresos —no solo en el presente, sino también en el futuro— subirán. Esta percepción de mayor riqueza induce a un aumento del consumo hoy. Por el contrario, después de recesiones que siguen a largos períodos de expansión —como en Asia después de la crisis de 1997, o en México después de 1994, o en muchos países después de la crisis financiera internacional de 2008-2009—, las expectativas futuras se pueden ensombrecer, lo que repercute en caídas de consumo más allá de las que la evolución del ingreso predeciría.

3.3.2. Cambios en la tasa de interés

Para facilitar la discusión aquí se considera un alza de la tasa de interés r. El análisis de una baja de tasa es análogo.

Note que la tasa de interés es un precio relativo. En la restricción presupuestaria para dos bienes, cada bien está ponderado por su precio. En este caso $1/(1+r)$ es el precio relativo del consumo en el período 2 en términos del bien del período 1 (en la restricción presupuestaria, C_1 aparece con un precio unitario), lo que equivale a que $1+r$ *es el precio del consumo presente respecto del consumo futuro*. Si $1/(1+r)$ baja, es decir, la tasa de interés sube, el presente se hace relativamente más caro que el futuro (trasladar una unidad de presente a futuro produce $1+r$ en el siguiente período), y por tanto conviene trasladar consumo al futuro. Eso se hace ahorrando. Por eso se estima en general que un aumento en la tasa de interés incentiva el ahorro debido al **efecto sustitución** de consumo presente por consumo futuro. Gráficamente el efecto sustitución corresponde al tradicional movimiento a lo largo de la curva de iso-utilidad cuando la pendiente cambia, se empina en este caso [11].

Sin embargo, esta conclusión no es completa, pues hay más efectos. Un alza de la tasa de interés también tiene un **efecto ingreso**. El efecto ingreso se observa al lado derecho de la restricción presupuestaria del individuo (3.11) y significa que para un ingreso dado, más bien dicho riqueza dada pues es el lado derecho, el individuo podrá comprar más consumo ya que el consumo del período dos se ha reducido. Este efecto, debiera aumentar el consumo en ambos períodos, reduciendo el ahorro, operando en la dirección contraria al

[11] La pendiente aumenta en valor absoluto, ya que es negativa, por eso se hablará de empinamiento.

efecto sustitución.

Ahora bien, hay un tercer efecto, que no es usual en los ejemplos tradicionales de microeconomía, y es el **efecto riqueza**. Este se ve en el lado izquierdo de la restricción (3.11). Cuando sube la tasa de interés el valor presente de los flujos futuros de ingreso declinan, reduciendo la riqueza. Por lo tanto, en la medida que $Y_2 > 0$, el individuo ve reducida su riqueza cuando sube r. El efecto riqueza opera en la dirección contraria pues induce a consumir menos en ambos períodos.

En términos de la figura 3.2 los efectos ingreso y riqueza se ven en el cambio de la restricción presupuestaria. Un alza en la tasa de interés corresponde a un empinamiento de la pendiente de la restricción presupuestaria. La restricción siempre pasa por el punto (Y_1,Y_2), pero se hace más empinada. Como se desprenderá de la figura, hay efectos ingresos y riqueza distintos que hacen incierta una respuesta definitiva.

Si $Y_2 = 0$, hay solo efecto ingreso ya que la riqueza no cambia. La restricción presupuestaria se empina a partir del eje horizontal, en Y_1, permitiendo mayor consumo en ambos períodos, ya que la nueva restricción está por encima de la original. Aquí el lector puede hacer el análisis tradicional del efecto sustitución desplazándose a lo largo de la iso-utilidad y luego moviéndose paralelamente a una utilidad superior por efecto ingreso.

El caso extremo del efecto riqueza es $Y_1 = 0$. En este caso sigue habiendo efecto ingreso por el lado del valor presente del consumo ("gasto" en consumo), el que se reduce permitiendo mayor consumo si la riqueza no variara. Sin embargo, el efecto riqueza es tal que la restricción presupuestaria se empina a partir del eje vertical, en Y_2, quedando debajo de la restricción original, reduciendo la capacidad de consumo. No es posible mantener los consumos previos al alza de tasas. El consumo en ambos períodos debe bajar, los efectos sustitución y riqueza se refuerzan. En consecuencia el ahorro aumenta, que en este caso es menor endeudamiento (S sube haciéndose menos negativo), ya que no hay ingreso en el primer período.

En consecuencia, el neto de los efectos ingreso y riqueza dependerá perfil de ingresos, es decir de cuanto de la riqueza está en cada período. Una forma equivalente de verlo es que dependerá de si el individuo es deudor ($S < 0$) o ahorrador ($S > 0$), también llamado acreedor. Es decir cuan lejos está Y_1 de C_1. Si un individuo no ahorra ni pide prestado —es decir, su óptimo se ubica en (Y_1,Y_2)—, solo opera el efecto sustitución, con lo cual un aumento en la tasa de interés lo lleva a ahorrar, desplazando ingreso hacia el futuro. Los casos extremos ya los discutimos más arriba. El deudor extremo es aquel que $Y_1 = 0$ y aumenta su ahorro ya que se le hace muy pesada la deuda. El efecto es incierto para el acreedor extremo, que tiene solo Y_1, ya que el efecto ingreso es relevante y no sufre caída de la riqueza[12].

En este simple modelo de dos períodos vemos que los efectos de un alza de tasas sobre el ahorro no son definitivos, La evidencia empírica ha concluido en general que los efectos de las tasas de interés sobre el ahorro son positivos, aunque muy débiles[13].

3.3.3. Un caso particular importante *

Aquí desarrollaremos analíticamente un caso de función de utilidad muy usado en la literatura y que nos permite analizar con cierto detalle el impacto de las tasas de interés sobre las decisiones de consumo-ahorro. Este ejercicio más formal nos permitirá derivar la función consumo a partir de la utilidad del individuo, algo que volveremos a ver en la sección 3.9 de este capítulo, y después volveremos a usar en capítulos posteriores.

Supondremos que el individuo vive dos períodos y maximiza la utilidad separable presentada en la ecuación (3.8):

$$\max_{C_1,C_2} u(C_1) + \frac{1}{1+\rho}u(C_2). \tag{3.12}$$

La tasa de descuento subjetiva ρ es la tasa con la cual el individuo descuenta la utilidad futura. La tasa de interés r es la tasa de mercado a la cual se descuentan los flujos futuros de ingresos. La tasa de descuento es un parámetro que revela la paciencia del consumidor. Si ρ es bajo, el futuro se descuenta poco, y es un individuo paciente. Podemos definir $\beta = 1/(1+\rho)$ como el **factor de descuento**. En algunos casos es más conveniente trabajar con el factor de descuento en vez de la tasa de descuento. El individuo maximiza sujeto a la siguiente restricción intertemporal

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r}. \tag{3.13}$$

La función de utilidad que usaremos es conocida como la función de aversión relativa al riesgo constante (CRRA) o de elasticidad intertemporal de sustitución constante[14]. En cada período, esta utilidad está dada por

[12] Un ejercicio útil es mostrar en gráficos el impacto de la tasa de interés sobre el ahorro dependiendo de si el individuo es deudor o acreedor, verificando lo discutido en el texto.

[13] Un buen resumen de la evidencia se puede encontrar en Deaton (1992) y Jappelli y Pistaferri (2017). Ver también Browning y Lusardi (1996).

[14] Esta función se usa para el análisis de decisiones bajo incertidumbre, en cuyo caso es útil verla como una función de aversión relativa al riesgo constante. Sin embargo, nuestro foco está en las decisiones intertemporales, por lo tanto conviene pensar en que esta función tiene una elasticidad de sustitución intertemporal constante.

$$\begin{aligned} u(C) &= \frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \quad \text{para } \sigma \geq 0 \text{ y } \neq 1 \\ u(C) &= \log C \qquad \text{para } \sigma = 1. \end{aligned}$$

Más adelante demostraremos que la elasticidad intertemporal de sustitución es $1/\sigma$[15].

La función logarítmica corresponde a la elasticidad de sustitución unitaria. Mientras más cerca está σ de 0, la elasticidad de sustitución intertemporal es mayor, en consecuencia la función de utilidad se aproxima a una función lineal en consumo. La elasticidad de sustitución infinita, es decir $\sigma = 0$, es una función de utilidad lineal, y el individuo, ante un pequeño cambio en la tasa de interés, preferirá cambiar su patrón de consumo de manera extrema, pues valora poco la suavización del consumo comparado con aprovechar de consumir en los períodos donde esto resulte más barato intertemporalmente.

En el otro extremo, cuando σ se acerca a infinito, la elasticidad se aproxima a 0 y la función corresponde a una función de utilidad de Leontief. En este caso, el individuo no reaccionará a cambios en la tasa de interés, y en general solo le interesará tener un consumo completamente plano en su vida.

Para resolver este problema, escribimos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{C_1^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_2^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \lambda\left[Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} - C_1 - \frac{C_2}{1+r}\right], \tag{3.14}$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange y es igual a la utilidad marginal del ingreso.

Derivando parcialmente respecto de C_1 y C_2, llegamos a las siguientes condiciones de primer orden

$$C_1^{-\sigma} = \lambda \tag{3.15}$$

$$C_2^{-\sigma} = \lambda\left(\frac{1+\rho}{1+r}\right). \tag{3.16}$$

Combinando estas dos ecuaciones para eliminar λ, llegamos a

$$\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\sigma} = \frac{1+\rho}{1+r}. \tag{3.17}$$

Esta ecuación muestra que cuando $\rho = r$, es decir el individuo es tan impaciente como el mercado, el consumo óptimo es constante en el tiempo. Este

[15] El -1 en la función de utilidad es irrelevante en nuestra discusión, pero en problemas más generales facilita el álgebra.

resultado es importante como punto de partida y se satisface independiente del valor de σ[16].

Usando esta expresión, podemos calcular la **elasticidad intertemporal de sustitución** (EIS). Esta se define como el cambio porcentual en la razón entre el consumo en el período 1 y el consumo en el período 2, cuando cambia un 1 % el precio relativo del consumo en el período 1 respecto al consumo en el período 2. Esto es

$$\text{EIS} = -\frac{\partial \log(C_1/C_2)}{\partial \log(1+r)}.$$

En consecuencia, la EIS nos dice cuánto cambiará la composición del consumo cuando los precios cambian. Si la EIS es elevada, C_1/C_2 cambiará mucho cuando r cambie. Si la tasa de interés sube, el precio del presente aumenta, con lo cual un individuo que tenga alta preferencia por sustituir consumirá más en el futuro, con lo cual $-C_1/C_2$ sube más (C_1/C_2 cae más). Por el contrario, si la EIS es baja, C_1/C_2 cambiará poco cuando r cambia.

Tomando logaritmo a ambos lados de (3.17) y derivando, llegamos a

$$\text{EIS} = \frac{1}{\sigma}.$$

La expresión (3.17) muestra el efecto sustitución. Resolviendo para C_1/C_2 se llega a que esta razón es es igual a $[(1+\rho)/(1+r)]^{1/\sigma}$. En consecuencia, un alza en r reduce la razón C_1/C_2 por efecto sustitución[17]. Mientras menor es σ (mayor la elasticidad de sustitución), mayor es la caída en C_1/C_2 cuando sube la tasa de interés.

Para llegar a las expresiones para C_1 y C_2, reemplazamos en (3.17) la restricción presupuestaria, que no es más que derivar $\mathcal{L}$ respecto de λ e igualar esta derivada a 0. Como lo que nos interesa es el ahorro, solo se muestra a continuación la expresión para C_1. Esta es

$$C_1 = \left(Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}\right)(1+\rho)^{1/\sigma}\left[(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + (1+\rho)^{1/\sigma}\right]^{-1}. \tag{3.18}$$

Por otra parte, sabemos que el ahorro S será

$$S = Y_1 - C_1, \tag{3.19}$$

[16] Este problema lo hemos resuelto usándola forma general de un lagrangiano, sin embargo esto se puede evitar en este caso. para ello bastaría remplazar C_2 de la restricción presupuestaria en la función de utilidad y así la utilidad queda solo como función de C_1 con lo que las condiciones de primer orden se obtienen de derivar dicha función respecto de C_1 e igualar a cero.

[17] Note que C_2/C_1 es la pendiente de la función consumo en el tiempo, mientras mayor es este valor más empinada es la trayectoria del consumo.

por lo tanto, para determinar qué pasa al ahorro frente a un cambio en r, basta con mirar lo que sucede con C_1.

Para comenzar, suponga que $Y_2 = 0$. En este caso

$$C_1 = Y_1(1+\rho)^{1/\sigma}\left[(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + (1+\rho)^{1/\sigma}\right]^{-1}. \tag{3.20}$$

El signo del impacto de un cambio en r sobre C_1 dependerá de σ. Si $\sigma < 1$, es decir la EIS es mayor que 1, el consumo caerá con un alza en la tasa de interés. Es una relación positiva entre ahorro y tasa de interés. Este es el caso donde hay suficiente sustitución intertemporal de consumo, de modo que este efecto, por el cual se reduce el consumo en el período 1 al ser más caro, domina al efecto ingreso, por el cual el ahorro disminuye ya que por la mayor tasa de interés hay que ahorrar menos para un mismo nivel de consumo en el período 2.

En cambio, cuando $\sigma > 1$, es decir, la EIS es baja, domina el efecto ingreso, y un aumento en la tasa de interés reduce el ahorro (aumenta el consumo en el primer período). En el caso logarítmico, cuando $\sigma = 1$, el efecto sustitución y el efecto ingreso se cancelan.

Ahora bien, tal como discutimos en la subsección anterior, el efecto final depende de si el individuo tiene ahorro neto positivo o negativo en el primer período. Aquí tenemos el tercer efecto que es el efecto riqueza y que se ve en el primer paréntesis de la ecuación (3.18). Cuando sube la tasa de interés este efecto deprime el consumo ya que el valor presente de Y_2 se reduce. ¿Cuán importante es este efecto? Depende si el individuo es ahorrador, es decir tiene poco Y_2 y quiere pasar Y_1 al segundo período, o es deudor, pide prestado en 1 para pagar con el ingreso en Y_2 que es relativamente grande. En consecuencia, el efecto riqueza es mayor para los deudores, lo que tienen relativamente más Y_2.

A diferencia de la función consumo keynesiana, el ingreso corriente no es lo que determina el consumo, sino el valor presente de sus ingresos. Da lo mismo cuándo se reciban los ingresos, *asumiendo que no hay restricciones al endeudamiento*. Sin embargo, para la reacción del consumo y ahorro a las tasas de interés, sí importa cuándo se reciben los ingresos, pues de eso depende el efecto riqueza.

Este caso especial nos ha permitido obtener resultados más precisos sobre la relación entre el ahorro y las tasas de interés. Aquí hemos podido ver que un elevado grado de sustitución intertemporal y/o un perfil de ingresos cargado hacia el futuro hacen más probable que la relación entre ahorro y tasas de interés sea positiva.

3.3.4. Restricciones de liquidez

El modelo de dos períodos sin duda es estilizado, y uno se preguntará cómo puede la teoría keynesiana reconciliarse con un enfoque dinámico como el visto aquí. La respuesta es que las **restricciones de liquidez** son una buena mejor forma de conciliar ambos enfoques. Esto es, además, un supuesto muy realista. Si el individuo no puede endeudarse en el período 1, aunque sí puede ahorrar, y se trata de un individuo al que le gustaría endeudarse, así como el ejemplo presentado en la figura 3.3, no le quedará otra opción que consumir en el período 1 todo su ingreso. En rigor es preferible hablar de **restricciones al endeudamiento**, aunque la literatura las llama mayormente restricciones de liquidez.

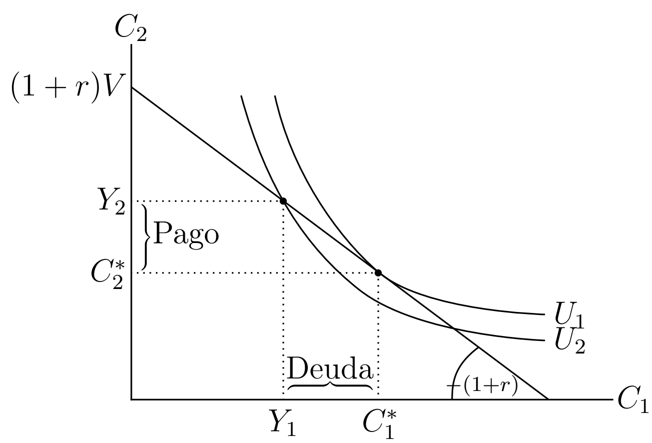

Figura 3.3: Maximización de utilidad en el modelo de dos períodos.

Si su ingreso sube en el período 1 a un nivel en que todavía la restricción de liquidez es activa, su consumo crecerá en lo mismo que el ingreso, con lo que llegará a una situación similar a la del caso keynesiano, con una propensión a consumir unitaria.

Dado que en una economía con restricciones de liquidez la gente que quiere tener ahorro negativo no lo puede hacer, el ahorro agregado en la economía con más restricciones de liquidez será mayor. Esto no quiere decir que esta situación sea buena, ya que mucho ahorro indeseado implica mayor sacrificio del consumo. De hecho, la figura 3.3 muestra que el individuo que no puede pedir prestado, en lugar de alcanzar un nivel de utilidad U_1, solo alcanza a U_2, pues su restricción presupuestaria es la misma que en el caso sin restricciones, hasta el punto correspondiente a (Y_1,Y_2) donde se hace vertical, puesto que no se puede acceder a mayor consumo en el período 1.

Es interesante notar que existen asimetrías en la respuesta del consumo al ingreso, y es distinta si el aumento es pequeño o grande. En particular, si el ingreso sube mucho podemos abandonar la zona de restricción de liquidez y el individuo ahorre, lo que reduce el efecto sobre el consumo. En cambio, una baja de ingreso, manteniendo la imposibilidad de endeudarse, siempre llevaría a un ajuste de la misma magnitud del consumo. En consecuencia, la respuesta del consumo al ingreso del período 1 (transitorio) es mayor para caídas que para alzas, algo consistente con la evidencia empírica. La propensión marginal a consumir es mayor para caídas de ingreso.

3.4. La teoría del ciclo de vida

Esta teoría, cuyo principal precursor fue Franco Modigliani[18], enfatiza el hecho de que cada persona cumple con un ciclo en su vida económica, en particular en lo que respecta a sus ingresos. Este ciclo de vida es: no percibe ingresos, trabaja y se jubila.

En la figura 3.4 se presenta el ciclo de vida de un individuo desde el momento en que comienza a percibir ingresos. El primer aspecto que se debe destacar, y a partir del modelo de dos períodos visto previamente, es que los individuos intentan suavizar su consumo, y para eso deben ahorrar y desahorrar en su ciclo de vida, para tener un consumo parejo. En la figura 3.4 suponemos que el individuo intenta tener un consumo parejo, a un nivel $\bar{C}$, a lo largo de su vida[19].

La trayectoria de ingresos del trabajo es la descrita en la figura: es creciente hasta alcanzar un máximo, luego desciende moderadamente hasta el momento de la jubilación, y finalmente los ingresos del trabajo caen a 0 después que el

[18] Modigliani ganó el premio Nobel de Economía en 1985 por el desarrollo de esta teoría, además de sus contribuciones a finanzas. Su "Nobel Lecture" (Modigliani, 1986) es una muy buena visión general de la teoría del ciclo de vida. Deaton (2005) hace una muy interesante revisión de las contribuciones de Modigliani a la teoría del consumo. Los primeros desarrollos de esta teoría los hizo Modigliani con su alumno Richard Brumberg, quien falleció joven, y también con el economista Albert Ando, por eso también se le conoce como la teoría del ciclo de vida de Modigliani, Ando y Brumberg.

[19] Más en general, deberíamos maximizar la utilidad en el tiempo del individuo, así como en el modelo de dos períodos. Sin embargo, lo importante es enfatizar que el individuo suaviza su consumo. Podemos racionalizar el caso discutido aquí como una elasticidad intertemporal de sustitución igual a 0, bajo la cual el ahorro no reacciona ante cambios en la tasa de interés. Tal como se vio en el modelo de dos períodos, este supuesto se puede justificar como una trayectoria óptima de consumo cuando la tasa de descuento es igual a la tasa de interés y no hay restricciones de liquidez.

individuo se retira. El área A corresponde a la acumulación de deuda, ya que el ingreso va por debajo de $\bar{C}$. La línea recta hacia abajo muestra el total de activos, que en este caso son pasivos.

Luego, el individuo comienza a recibir ingresos más elevados y en el área B comienza a pagar la deuda y los pasivos se reducen hasta un punto en el cual se comienzan a acumular activos. Este ahorro es el que se gasta después de que se retira. Al final, el individuo se consume todos sus ahorros y termina con 0 activos.

Se supone que en la figura, si la tasa de interés es 0, el área B debería ser igual a la suma de las áreas A y C. Si hay una tasa de interés positiva, la suma de los valores presentes de las áreas debería igualar a 0. Las áreas están algo distorsionada en la figura pero ilustran bien las fases del ciclo de vida.

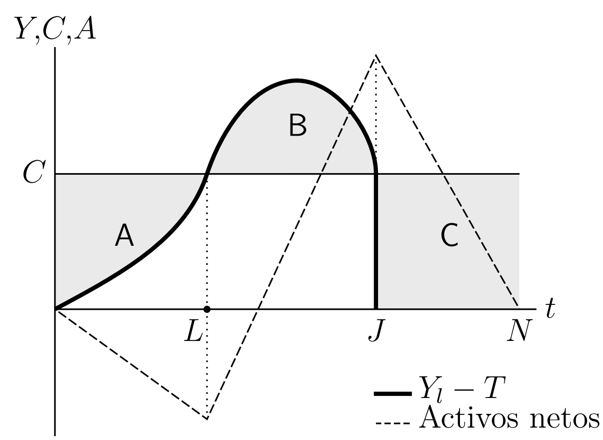

Figura 3.4: Teoría del ciclo de vida.

Si el individuo quiere tener exactamente consumo igual a $\bar{C}$ de su restricción presupuestaria intertemporal, dada por (3.5), podemos encontrar el valor de $\bar{C}$ consistente con esta restricción. Para simplificar supondremos que $N \to \infty$, y en consecuencia el calor del consumo constante será[20]

$$\bar{C} = r\left[A_t + \sum_{s=t}^{N} \frac{Y_{\ell,s} - T_s}{(1+r)^{s+1}}\right]. \tag{3.21}$$

[20] Este valor es aproximado para N igual a infinito, para así resolver una suma más sencilla. La expresión $\sum_{j=0}^{\infty} 1/(1+r)^j = (1+r)/r$. En cambio, $\sum_{j=0}^{N} 1/(1+r)^j = [(1+r)/r] - [1/r(1+r)^N] = \left[\left((1+r)^{N+1} - 1\right)/r(1+r)^N\right]$. Ver nota de pie **??** del capítulo **??** para una derivación de estas fórmulas.

El individuo irá ajustando A_t en los períodos futuros, de modo de obtener un consumo constante.

Lo que la expresión anterior nos dice es que el individuo, con un horizonte suficientemente largo, para mantener el consumo parejo en cada período tendrá que consumir el **valor de anualidad** de su riqueza, que está dado por el interés real de ella. Al considerar que el horizonte es finito, el individuo iría consumiendo, además del interés real, algo del stock riqueza.

Lo importante de esta teoría es que, al decidir su trayectoria de consumo, la que presumiblemente es suave a lo largo de la vida, el individuo planifica tomando en cuenta toda su trayectoria de ingresos (esperados en un caso más real) futuros.

Podemos usar este esquema para analizar el ahorro y el consumo agregado de la economía, y así investigar el impacto de los factores demográficos sobre el ahorro. Por ejemplo, si suponemos que la población no crece, toda la gente tiene el mismo perfil de ingresos y la cantidad de personas en cada grupo de edad es la misma. En este caso la figura 3.4 no solo representa la evolución del consumo en el tiempo para un individuo dado, sino que, además, corresponde a una fotografía de la economía en cualquier instante. En el agregado (dado que A+C=B) el ahorro es 0. Lo que unos ahorran, otros lo desahorran o se endeudan[21]. En consecuencia, aunque haya individuos ahorrando, en el neto en esta economía no se ahorra.

La implicancia es distinta cuando consideramos que la economía crece. Podemos analizar el impacto del crecimiento de la población o de la productividad. La consecuencia de esto es que la parte más joven de la distribución tiene más importancia. Esto significa que las áreas A y B serían más importantes, y por lo tanto, más grandes que el área C. Por consiguiente, el crecimiento afecta al ahorro. Mientras exista un mayor crecimiento, habrá mayor ahorro, pues habrá más gente en el ciclo A y B de la vida que en C. Si bien A es desahorro, B es ahorro, y ambas juntas son ahorro neto. En la vejez hay desahorro. Lo importante es que las áreas A y B sean crecientes en el tiempo, y de esta forma quienes están en la parte de ahorro neto ahorran más que quienes están en la etapa del desahorro. Esto puede pasar porque la población aumenta o porque la productividad de las personas se eleva. Así, el mayor crecimiento sería el causante de las elevadas tasas de ahorro.

Debe notarse que esta teoría predice que mayor crecimiento resulta en mayor ahorro. Muchas veces, y tal como veremos más adelante en la parte **??**, se argumenta la causalidad en la dirección contraria, es decir, mayor ahorro produce mayor crecimiento. Si alguien graficara ahorro y crecimiento vería

[21] Para ser riguroso, hay que asumir una tasa de interés igual a 0, ya que las áreas deben sumarse descontando la tasa de interés.

una relación positiva. Sin embargo, esta relación puede ser bidireccional, y para un análisis correcto es importante entender que la causalidad va en las dos direcciones. Por ejemplo, hay quienes plantean que la mayor parte de esta correlación se debe al efecto ciclo de vida. Es decir, la mayor parte de la correlación no justifica que aumentar el ahorro sea lo mejor para crecer.

También podemos analizar restricciones de liquidez. Una restricción de liquidez implica que se consume el ingreso mientras los agentes no se pueden endeudar ($A_t = 0$). Después, el individuo comienza a ahorrar para la vejez. Puesto que en la primera parte de la vida no se endeuda, y en la medida que haya crecimiento, las restricciones de liquidez deberían, al igual que el crecimiento, aumentar el ahorro agregado en la economía, y eso es lo que en la práctica se observa [22].

Por último podemos discutir los efectos de cambios demográficos ocurridos en las últimas décadas y que impactan el ahorro. Este es un tópico muy analizado y se ha mostrado que una de las razones más importantes para las bajas tasas de interés en el mundo, algo que veremos más adelante, es que el ahorro ha aumentado como resultado del envejecimiento de la población. Aquí hay efectos contrapuestos:

- En el largo plazo si hay más población vieja, que es la que desahorra, el ahorro debiera bajar. Este es un efecto composición de la población más que un efecto del ahorro individual.

- En anticipación de una vida más larga quienes trabajan aumentarán su ahorro. Por otra parte quienes están en la etapa del desahorro no cambian el agregado ya que sus ahorros los hicieron en el pasado y ahora solo los consumen. Este efecto sería menor si al mismo tiempo la edad de jubilación aumenta paralelamente con la esperanza de vida. Pero esto no ha ocurrido, las edades de jubilación promedio se han mantenido entre los 60 y 65 años.

La transición es suficientemente larga para pensar que lo que ha dominado y seguirá dominando por mucho tiempo es el segundo efecto[23]. Por otra parte, esto tiene efectos sobre los sistemas de pensiones, algo que discutimos a continuación.

---

[22] Gourinchas y Parker (2002) encuentran que el consumo en el ciclo de vida en los Estados Unidos es creciente hasta los 45 años, para después declinar suavemente, de manera similar al ejemplo presentado en la figura. Ellos argumentan que hay dos etapas en el ciclo de vida. En la primera fase hay algo de cortoplacismo, que también podría asociarse a restricciones de liquidez. Después comienzan a ahorrar para su jubilación.

[23] Para más detalles y referencias ver Bean y col. (2015) y Carvalho, Ferrero y Nechio (2016).

3.5. Seguridad social

Luego de estudiar la teoría del ciclo de vida, podemos discutir una de las principales aplicaciones de esta teoría: la seguridad social. En particular, de los muchos componentes que tienen los sistemas de seguridad social, nos concentraremos en el sistema de pensiones, por el cual se permite que la gente que se jubila pueda tener ingresos.

Existen dos sistemas de seguridad social, aunque en la práctica los sistemas imperantes en el mundo combinan ciertos elementos de ambos.

1. **Sistema de reparto** (*pay-as-you-go*). Bajo este esquema, quienes están trabajando pagan impuestos que se entregan a los jubilados. Es decir, se *reparte* la recaudación de los trabajadores activos entre los jubilados (lo llamaremos SR).

2. **Sistema de capitalización individual** (*fully-funded*). Bajo este esquema, quienes están trabajando y recibiendo ingresos deben ahorrar en una cuenta individual que se invierte en el mercado financiero y cuyos fondos acumulados, incluidos los intereses, se entregan durante la jubilación (lo llamaremos SCI).

Ambos sistemas tienen diferencias e implicancias distintas sobre la economía, pero su discusión popular está también llena de mitos.

Es fácil darse cuenta de que si los individuos ahorrasen según la teoría del ciclo de vida, el SCI no tendría ningún efecto sobre la economía, pues todo lo que un individuo fuese obligado a ahorrar lo desahorraría voluntariamente para tener un nivel de ahorro constante. Entonces, el ahorro nacional no cambiaría, salvo que el ahorro forzoso fuese excesivo y la gente tuviera restricción de liquidez que le impida compensar los pagos previsionales. En un SR la conclusión sería similar, pues los impuestos a la seguridad social los sacarían de menos ahorro, pues recibirán ingresos una vez jubilados.

Hay que hacer una primera distinción importante entre los sistemas de pensiones: el retorno en el SCI es la tasa de interés de mercado; en el SR, es la tasa de crecimiento de los ingresos de la población. Si la población o el ingreso per cápita crecen rápidamente, en un principio habrá pocos jubilados respecto de los jóvenes y, por lo tanto, habrá mucho que repartir. Si suponemos que la rentabilidad del mercado de capitales es igual al crecimiento de los ingresos, de modo que en ambos esquemas el retorno es el mismo, el SR, al igual que el SCI, no tendría ningún efecto sobre el ahorro de la economía si la gente se comportase de acuerdo con la teoría del ciclo de vida.

Entonces surge una primera pregunta: ¿Por qué existe seguridad social? ¿Por qué los países crean estos sistemas obligatorios si la gente podría ahorrar por su propia voluntad? A continuación se mencionan cuatro razones que justifican la introducción de tal sistema[24].

- Tal vez una de las más importantes tiene que ver con un problema de inconsistencia intertemporal. Esta teoría plantea que la gente no tiene los suficientes incentivos para ahorrar para la jubilación, debido a que sabe que si no ahorra, los gobiernos no la dejarán en la pobreza cuando estén viejos. En consecuencia, la gente sub-ahorra ante la certeza de que si no tienen recursos, estos le serán provistos por el gobierno. Esta es una conducta óptima desde el punto de vista individual, pues ¿para qué se ahorra si se pueden conseguir recursos adicionales sin necesidad de ahorrar? Ahora bien, esta es una conducta inconsistente intertemporalmente[25]. No es una conducta óptima desde el punto de vista social Aunque los jóvenes planteen que no subsidiarán a quienes no ahorran, al ver a los viejos sin ingresos terminarán subsidiándolos en cualquier caso. Por lo tanto, para que la sociedad se proteja de esta incapacidad de cumplir con el compromiso de no apoyar a quienes no ahorran, la sociedad los obliga a ahorrar desde jóvenes para cuando se jubilen.

- Otra razón es que permite resolver problemas en el mercado del trabajo. En muchos países, la condición para recibir una jubilación es no estar trabajando, o al menos cobrar un impuesto muy alto al jubilado que trabaja. Esto ha llevado a algunos a plantear que los sistemas de pensiones buscan obligar a la gente que ya tiene baja productividad, a retirarse de la fuerza de trabajo de un modo más humano. Sin embargo, en la actualidad dado los aumentos de la esperanza de vida de la población los esfuerzos van en la dirección opuesta, en el sentido de abrir más posibilidades para que las personas en edad de jubilar puedan seguir trabajando.

- Siempre es posible —y útil— plantear que hay una fracción de la población que es miope y, por tanto, no planifica el consumo y ahorro durante su vida, como predice la teoría del ciclo de vida. Esto es lo que usualmente se llama miopía, es decir la gente no mira muy en el futuro.

[24] Para una revisión general de las teorías de seguridad social y sus implicaciones de política, ver Mulligan y Sala-i-Martin (1999). Ellos distinguen tres tipos de teorías: las de economía política, las de eficiencia y las narrativas.

[25] Una discusión más detallada de inconsistencia temporal se encuentra en el capítulo **??**.

- Las tres razones expuestas son teorías basadas en la idea de que la seguridad social introduce eficiencia en la economía. Sin embargo, uno también puede argumentar razones de economía política para justificar la seguridad social. Por ejemplo, los ancianos pueden ser más poderosos en el sistema político que los jóvenes y, por tanto, esto los hace decidir en favor de que haya redistribución desde los jóvenes hacia ellos.

Las razones de economía política son fundamentales para entender la evolución y distorsiones que se generan con el sistema de pensiones. Incluso aunque ambos sistemas tengan exactamente el mismo efecto sobre el ahorro —algo que no necesariamente es así, como se verá más adelante— el gran problema con el SR en comparación al SCI es que en el primero, al estar los beneficios desvinculados del esfuerzo personal, distintos grupos de interés tendrán incentivos para aumentar sus jubilaciones a través de la redistribución, o a reducir los incentivos a contribuir a la seguridad social. En todo caso, en la actualidad los sistemas de seguridad social, independiente de si es SR o SCI, han tratado de reducir al máximo las distorsiones entre grupos y asegurar incentivos a cotizar.

Otra ventaja de los SCI, y que explican por qué muchos países se mueven en esa dirección, es que sus retornos dependen menos de variaciones demográficas y más del retorno efectivo del mercado de capitales. Mientras que en Estados Unidos los *baby-boomers* (la generación que nació en la posguerra, cuando hubo un fuerte aumento de la población) trabajaban, los jubilados disfrutaban. Ahora que los *baby-boomers* se empiezan a jubilar, y como producto de que tuvieron pocos hijos, la seguridad social enfrenta problemas de financiamiento.

Como veremos cuando estudiemos teorías del crecimiento económico en el largo plazo el retorno del capital debiera ser mayor que el crecimiento del PIB, en consecuencia el retorno del SCI es mayor que el del SR. Es decir el SCI proveería mayores pensiones que el SR.

En general, se argumenta que los SCI generan más inversión y permiten a las economías tener más capital que los SR. La lógica es que, al ser ahorro, el SCI genera más ahorro global en la economía, mientras que el SR es un simple traspaso de uno a otro y no genera ahorro. Hasta aquí el argumento parece perfecto. Sin embargo, ignora un elemento clave: ¿Qué hacemos con la primera generación cuando se introduce un sistema de pensiones? o si un país se cambia desde un SR a un SCI ¿qué se hace con la última generación del SR que ya no tiene aportes pues los jóvenes ahorran para su propia vejez?

Al momento de introducir un SCI los jóvenes ahorran y el ahorro global aumenta. Pero al momento de la introducción del sistema los viejos de ese momento no recibirán ningún beneficio. Esto equivaldría a introducir un SR, cobrar a la primera generación joven, no darle pensiones en esa primera oportunidad a los jubilados sino ahorrar las contribuciones, y cuando los jóvenes se jubilan empezar a pagar pensiones. Por lo tanto, en una primera aproximación, la contribución de un SCI —en comparación a un SR— al ahorro dependerá de lo que pasa con la primera generación. Si se comienza un SCI pero se quiere dar beneficios a los actuales viejos, el gobierno tendrá que endeudarse, y el mayor ahorro se compensará con menos ahorro público, de manera que en ambos sistemas no habría ahorro neto.

Lo mismo ocurre en la transición de un sistema a otro. Si se reemplaza un SR por un SCI, la pregunta es qué hacer con los jubilados cuyas pensiones ya no se financiarán con los impuestos de los jóvenes. En ese caso, será de cargo fiscal, y probablemente el fisco deberá endeudarse en exactamente lo que los jóvenes están empezando a ahorrar. O sea, en lugar de aumentar el capital de la economía, la deuda pública demanda esos nuevos ahorros. Por lo tanto, si pensamos de forma realista en cómo introducir o reformar un sistema de seguridad social, su efecto sobre el ahorro no será mecánico y dependerá crucialmente del ajuste que haga el gobierno para financiar las jubilaciones de quienes quedan en el SR sin tener que recurrir al endeudamiento. Por lo tanto, lo más probable es que la introducción de ambos sistemas, o el cambio, no tendrá efectos relevantes sobre el ahorro. El efecto relevante en una transición de un SR a un SCI puede ser un esfuerzo de aumentar el ahorro público para financiar el sistema. El mayor ahorro vendría del ahorro público.

Sin embargo, hay razones para pensar que habrá efectos —aunque no de la magnitud de todo lo que se ahorra en el sistema— sobre el ahorro, al introducir un SCI. El principal efecto —en especial en países en desarrollo— es que el mercado de capitales se dinamiza ofreciendo nuevas oportunidades que incentivan el ahorro. Los fondos de pensiones manejan grandes cantidades de recursos que deben ser invertidos a largo plazo, lo que genera oportunidades de financiamiento y potencialmente mayor ahorro.

3.6. Teoría del ingreso permanente

Esta teoría fue desarrollada por otro premio Nobel, Milton Friedman, quien obtuvo el premio en 1976. Al igual que la teoría anterior se basa en el hecho de que la gente desea suavizar el consumo a lo largo de la vida. Pero en lugar de ver el ciclo de vida, enfatiza que, cuando el ingreso de los individuos cambia, ellos deben evaluar si estos cambios son transitorios o permanentes. La reacción a los cambios permanentes no será la misma que la reacción a los cambios transitorios. El consumo reacciona más fuerte antes cambios permanentes, pues estos corresponden a un mayor aumento de riqueza que un cambio de la misma magnitud pero transitorio.

Esto es fácil de ver en el modelo de dos períodos analizado previamente. Si Y_1 sube, pero Y_2 no, el aumento del consumo será menor que si Y_1 e Y_2 suben. En el primer caso hay un aumento transitorio en el ingreso; en el segundo, un aumento permanente. La explicación es simple: cuando el cambio es permanente, el aumento del valor presente de los ingresos es mayor que cuando es transitorio.

Supongamos que un individuo desea un consumo parejo y la tasa de interés r es 0. Denotando por $\bar{C}$ este nivel de consumo, tenemos que[26]

$$\bar{C} = \frac{A_1 + \sum_{s=1}^{N}(Y_{\ell,s} - T_s)}{N}. \tag{3.22}$$

Si $Y_{\ell,s}$ aumenta por un período en x, el consumo aumentará en x/N. En cambio, si el ingreso sube para siempre en x, el consumo subirá en x, es decir, N veces más que cuando el aumento es transitorio.

En general la gente no sabe si los cambios de ingreso son permanentes o transitorios. Una forma sencilla de ligar la función keynesiana y la teoría del ingreso permanente es suponer que la gente consume una fracción c de su ingreso permanente Y^p, es decir

$$C_t = cY_t^p,$$

presumiblemente c será muy cercano a 1. Por su parte, si suponemos, por ejemplo, que cuando el ingreso persiste por dos períodos es considerado permanente, pero solo una fracción θ del ingreso corriente se considera permanente, podemos aproximar el ingreso permanente como

$$Y_t^p = \theta Y_t + (1-\theta)Y_{t-1},$$

es decir, si el ingreso sube en t, solo una fracción $\theta \in (0{,}1)$ de ese incremento es considerado permanente. Ahora bien, si el aumento persiste por otro período, entonces se internaliza completo como permanente. Así, la función consumo queda como

$$C_t = c\theta Y_t + c(1-\theta)Y_{t-1}.$$

La propensión marginal al consumo en el corto plazo es $c\theta$, y en el largo plazo es c.

El hecho de que el ingreso pasado afecta al consumo presente no es porque la gente no mira al futuro para hacer sus planes, sino que a partir del pasado extrae información para predecir el futuro. En general, se podría pensar que

[26] Un ejercicio sencillo, pero útil, es derivar esta expresión. El individuo tiene activos por A_1 a principios del período 1 y vive por N períodos.

no solo el ingreso en $t-1$, sino que tal vez el ingreso en $t-2$ y más atrás, se use para predecir si los cambios son permanentes o transitorios.

Podemos avanzar en el desarrollo de la teoría del ingreso permanente, siendo más precisos en la explicación de la evolución del ingreso a través del siguiente caso simplificado. Suponga un individuo que quiere tener un consumo parejo, no tiene activos en t y su horizonte es infinito. El valor presente de sus ingresos es igual a V. En este caso se debe cumplir que[27]

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} C = \frac{1+r}{r} C = V,$$

entonces

$$C = \frac{r}{1+r} V. \tag{3.23}$$

Suponga que repentinamente en t el individuo recibe un ingreso $\bar{Y} > Y$, y prevé que su ingreso permanecerá constante en $\bar{Y}$ con probabilidad p, o se devolverá para siempre al nivel Y el siguiente período con probabilidad $1-p$. La probabilidad p representa cuan permanente es el *shock* de ingreso.

Denotemos el valor presente de sus ingresos en caso que el ingreso permanezca alto como V_a, y en el caso que el ingreso se devuelva a Y como V_b. En consecuencia, tendremos que el consumo será

$$C = \frac{r}{1+r}[pV_a + (1-p)V_b]. \tag{3.24}$$

Es fácil ver, usando las ya conocidas fórmulas para la suma de factores de descuento, que

$$\begin{aligned} V_a &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \bar{Y} = \frac{1+r}{r} \bar{Y} \\ V_b &= \bar{Y} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} Y = \bar{Y} + \frac{1}{r} Y. \end{aligned}$$

Remplazando estas dos expresiones en (3.24) llegamos a

$$C = \frac{r+p}{1+r} \bar{Y} + \frac{1-p}{1+r} Y. \tag{3.25}$$

Ahora bien, podemos calcular la propensión marginal a consumir en el momento en que ocurre el *shock* de ingreso que uno deduciría de observar los datos: es decir, $(C_t - C_{t-1})/(Y_t - Y_{t-1})$. Dadas las fórmulas para el consumo, y

[27] Recuerde para lo que sigue que $\sum_{t=0}^{\infty} 1/(1+r)^t = (1+r)/r$ y $\sum_{t=1}^{\infty} 1/(1+r)^t = 1/r$.

el hecho de que en $t-1$ se tiene que consumo es igual a Y, restando a ambos lados Y de la ecuación (3.25), y luego dividiendo por $\bar{Y}-Y$, tendremos que

$$\frac{C_t - C_{t-1}}{\bar{Y} - Y} = \frac{r+p}{1+r}. \tag{3.26}$$

Es decir, la propensión a consumir será creciente en p, es decir, en cuán permanente se espera que sea el cambio de ingresos. Si $p = 0$, la propensión será muy baja, con una tasa de interés de 5 % se tendrá que es cercana a 0,05, es decir, aproximadamente la tasa de interés. Así, el individuo convierte este ingreso adicional en una anualidad. Si, en cambio, $p = 1$, la propensión a consumir será 1, ya que aumentó su ingreso permanente.

Podemos extender este análisis y preguntarnos qué pasaría si el *shock* de ingreso trajera muy buenas noticias. Por ejemplo, después del aumento del ingreso el individuo espera con probabilidad p que se mantenga en $\bar{Y}$, y con $1-p$ suba aún más —por ejemplo a $\bar{\bar{Y}}$— tal que $\bar{\bar{Y}} > \bar{Y}$. Es decir, el ingreso esperado el siguiente período subirá por encima de $\bar{Y}$. El lector puede verificar que el consumo en t puede subir más que lo que sube el ingreso, con una propensión mayor que 1. Esto demuestra que la propensión a consumir depende básicamente de lo que los *shocks* al ingreso indican acerca de la evolución futura de ellos. En este ejemplo mostramos que el consumo podría ser incluso más volátil que el ingreso, algo en principio no contemplado en las versiones más simples de la teoría. Esto podría explicar por qué después de las estabilizaciones exitosas, o de un período de reformas económicas beneficiosas, se puede producir un *boom* de consumo difícil de explicar con funciones de consumo keynesianas tradicionales.

Cabe destacar que la teoría del ingreso permanente y la del ciclo de vida no son alternativas, sino más bien complementarias. Por ello, en muchos casos se habla de la teoría del ciclo de vida/ingreso permanente (CV/IP), pues ambas pueden ser derivadas de la conducta de un individuo que maximiza la utilidad del consumo a lo largo de su vida. La teoría del ciclo de vida enfatiza la trayectoria del ingreso en distintas etapas de la vida del individuo, mientras que la del ingreso permanente destaca destaca a naturaleza de los *shocks* al ingreso, sean estos permanentes o transitorios.

En el contexto de la teoría CV/IP hemos resaltado que, para explicar el paralelismo del consumo e ingreso, así como también posibles asimetrías en la respuesta del consumo al ingreso, las restricciones de liquidez ayudan mucho. Además de realistas, permiten entender mejor el consumo que una simple función consumo keynesiana. Obviamente para estudiar otros fenómenos hay que refinar estas teorías. Por ejemplo más adelante veremos el papel que juega la incertidumbre en las decisiones de ahorro y consumo.

3.7. Viviendas, riqueza y consumo

Uno de los principales factores que causaron la crisis financiera internacional de 2008-2009 fue un desmedido aumento del precio de las viviendas, esto habría aumentado el consumo y el endeudamiento, lo que terminó en un colapso financiero.

En esta sección veremos un primer aspecto de esto y es el efecto sobre el consumo que tendría un aumento en el precio de las viviendas. Las casas son una de las principales formas de riqueza de los hogares, y un aumento en su precio resultará en un aumento de la riqueza. Uno esperaría en principio que ese aumento de la riqueza impulse también el consumo, y una caída de su precio deprimiría el consumo causando una recesión. ¿Pero son las viviendas realmente riqueza neta?

Podemos definir la riqueza de un hogar como $A = F + pH$, donde F es la riqueza financiera (denominada en moneda local) y H es el stock de vivienda y p su precio. Supondremos que el precio relativo de las viviendas es constante y si cambia se espera que permanecerá constante. Si p sube, la riqueza del hogar aumenta. Se supondrá además que no hay depreciación y el individuo recibe un ingreso y cada período, el hogar desea tener un consumo constante igual a C y tiene un horizonte infinito. En ausencia de depreciación, y suponiendo no hay impuestos a los retornos sobre activos financieros y casas, tenemos que dado un retorno r sobre la riqueza total la restricción presupuestaria intertemporal será

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{y}{(1+r)^t} + (1+r)A.$$

Sabemos que la solución a esta ecuación, después de resolver las sumatorias, es

$$C = y + r(F + pH). \tag{3.27}$$

El consumo no-vivienda del individuo lo llamaremos c y el consumo de casa será su renta, asumida igual a la tasa de interés. Entonces tenemos que,

$$C = c + rpH. \tag{3.28}$$

Supondremos para simplificar que la demanda por vivienda es insensible a su precio, es decir cuando el precio de la vivienda cambia su consumo no cambia, es siempre H. En consecuencia cuando sube el precio de las viviendas el *consumo de vivienda sube en lo mismo que aumenta el ingreso por renta de la vivienda*, y por lo tanto el consumo del resto de los bienes c no cambia con el precio de las viviendas. Esto es como decir que *las viviendas no son riqueza neta*, ya que el lado de los activos, la vivienda, está perfectamente calzado con el consumo. Este resultado es fuerte y dice que si hay un *boom* en el precio de las viviendas no habrá cambios en el consumo de otros bienes. Esto significa que

$$c = y + rF, \tag{3.29}$$

independiente del precio de las viviendas. Por su parte, el consumo de viviendas siempre será rpH.

Obviamente hemos hecho un conjunto de supuestos simplificadores para llegar a este resultado, pero es un resultado importante para ver como explicamos el colapso de la burbuja inmobiliaria en Estados Unidos y su propagación a toda la economía. Levantando algunos de estos supuestos tenemos que[28]:

- Diferencia entre propietarios y arrendatarios. Quienes tienen propiedades arrendadas, por ejemplo para renta, tendrán una ganancia de capital pues tienen más viviendas que las que consumen. En el otro extremo, habrá quienes arriendan y en la medida que el valor de los arriendos suben al ser las casas más caras tendrán una pérdida. Por lo tanto, habrá redistribución desde arrendatarios a arrendadores y los efectos sobre el consumo dependerá de las propensiones a consumir de la riqueza relativa.

- Depreciación de la casa e impuestos. Si las viviendas se deprecian a una tasa δ por período, el costo de consumir vivienda será $(r+\delta)pH$, mientras que el ingreso por la propiedad de vivienda debería ser también $(r+\delta)pH$, con lo cual el consumo no debiera cambiar. Podrían haber diferencias en el tratamiento tributario de las rentas por arriendo de viviendas, o por el costo financiero, y de las otras rentas financieras. Esto también generaría redistribución entre tenedores de diferentes activos así como entre el gobierno y los privados. Esto dependerá de las características de los sistemas tributarios.

- Sustitución en consumo. La demanda por viviendas depende del precio de la vivienda. Aquí habrá efectos sustitución e ingreso. Si el consumo de viviendas cae uno esperaría que el consumo de no-vivienda (c) aumente. En todo caso, el efecto total sobre el consumo agregado (C) será incierto.

- Restricciones de liquidez. Este efecto es relevante y como se discute en detalle más abajo, este es el que puede explicar porque el consumo sube con el precio de las viviendas.

La crisis financiera internacional es conocida también como la crisis *subprime* y el mercado hipotecario fue central en la transmisión y generación de la

[28] para una discusión más detallada ver Muellbauer (2007).

crisis. ¿Cómo lo explicamos entonces? Por el rol del sistema financiero, en particular por la exposición de los bancos a los activos inmobiliarios y la dinámica de la deuda.

Si consideramos que los individuos tienen restricciones de liquidez, ellos pueden usar sus casas como garantía para otros créditos aparte de su crédito hipotecarios. Por ejemplo para agrandar la casa, o para comprar un auto. Cuando el precio de las casas sube el endeudamiento sube. Pero cuando los precios de las casas caen los bancos pueden entrar en serios problemas. Las mismas casas pueden inducir excesivo endeudamiento. Si para comprar una casa hay un monto máximo respecto del valor de la vivienda que los bancos pueden prestar (conocido como LTV, *loan-to-value ratio*), un aumento del valor de la casa permite mayor deuda, lo que en la práctica ocurrió. Además si se espera que los precios de las casas sigan subiendo, el ciclo de crédito se exacerba.

La crisis se llama *subprime* porque se otorgaron muchos créditos a hogares muy riesgosos, que tenían poca historia crediticia y pocas garantías. Esto fue una buena intención para permitir que muchas familias tuvieran acceso a ser dueños de una vivienda, pero al final terminó generando una gran crisis, en las que a quienes se quiso ayudar terminaron pagando una parte importante del costo vía desempleo y pérdida de sus viviendas.

La desregulación financiera permitió que los bancos aumentarán mucho el crédito por la vía de generar préstamos, luego sacarlos de su balance vendiéndolos (*securitizándolos*), y así poder prestar más. El aumento del crédito alimentaba el aumento de los precios de las viviendas y no se estimaba que estos fueran a caer, lo que resultó una muy mala percepción.

Cuando los precios de las casas cayeron, el valor de las garantías cayó, la gente dejó de pagar y el valor de los créditos se desplomó, causando una crisis bancaria. Todos estos temas los retomaremos en el capítulo **??**, pero por ahora basta notar que si el valor de los activos de los bancos (sus préstamos) cae mucho, puede no tener capacidad de responder por sus pasivos, deuda y depósitos, lo que hará que el banco quiebre.

El canal financiero es central para explicar porque la crisis hipotecaria tuvo ramificaciones tan profundas, ya que en principio las casas no debieran ser riqueza neta, pero al interactuar con el crédito, los efectos de las alzas y caídas de sus precios puede ser de primer orden tanto en estimular el endeudamiento y el consumo en el *boom* como la fuerte caída de la actividad y crisis bancarias en la desaceleración. De hecho, existe evidencia que apuntaría a que la existencia de restricciones al crédito aumentan la respuesta de la economía a *shocks* en los precios de las viviendas (Iacovello (2005)).

3.8. Incertidumbre, consumo y ahorro por precaución

3.8.1. Implicaciones estocásticas de la teoría del consumo*

En un trabajo clásico, Hall (1978) demuestra que, bajo ciertas condiciones, la teoría del CV/IP implica que el consumo debería seguir un **camino aleatorio**, proceso que será descrito más adelante. Para demostrar esto, usaremos un modelo de consumo óptimo en dos períodos, fácilmente generalizable a horizontes más largos, donde hay incertidumbre.

Considere el mismo problema de la sección 3.3.3, pero donde el ingreso del período 2 es incierto (se puede decir también aleatorio o estocástico). Supondremos que el individuo toma su decisión en t para t y $t+1$. Es decir, debe resolver el siguiente problema

$$\max_{C_t, C_{t+1}} u(C_t) + \frac{1}{1+\rho}\mathrm{E}_t u(C_{t+1}), \tag{3.30}$$

donde ρ es la tasa de descuento. El individuo maximiza el valor esperado de la utilidad en el siguiente período. El valor esperado se toma basado en toda la información acumulada al período t. En consecuencia, E_t corresponde al valor esperado condicional a toda la información disponible en t. Esta notación nos acompañará a lo largo del libro cuando tomamos expectativas. Estas corresponden a las **expectativas racionales**, pues se toman con toda la información disponible en t. El individuo maximiza la utilidad esperada, sujeto a la siguiente restricción presupuestaria intertemporal:

$$Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r} = C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r}.$$

Usando esta restricción y reemplazando C_{t+1} en la función de utilidad, tenemos que el individuo maximiza la siguiente expresión[29]:

$$u(C_t) + \frac{1}{1+\rho}\mathrm{E}_t u(Y_{t+1} + (1+r)(Y_t - C_t)). \tag{3.31}$$

La condición de primer orden de este problema es

$$u'(C_t) = \frac{1+r}{1+\rho}\mathrm{E}_t u'(C_{t+1}). \tag{3.32}$$

[29] Se puede maximizar con restricciones y después despejar para el multiplicador de Lagrange, como se hizo en la sección 3.3.3. El resultado es exactamente el mismo. La condición de primer orden es la misma que en horizonte infinito, pero visto en dos períodos resulta más simple de resolver.

Hemos sacado r fuera del valor esperado, ya que es una tasa libre de riesgo.

Ahora bien, si suponemos que $r = \rho$, y al mismo tiempo que la función de utilidad es cuadrática, donde $u(C) = -(\bar{C} - C)^2$, se llega a[30]

$$C_t = \mathrm{E}_t C_{t+1},$$

es decir, el consumo en valor esperado en el período 2 es igual al consumo cierto del período 1. Dado que el valor esperado ha sido tomando en consideración toda la información disponible en t, el único origen de desviaciones serán *shocks* inesperados al consumo, es decir, $C_{t+1} = \mathrm{E}_t C_{t+1} + \xi_{t+1}$, donde el valor esperado en t de ξ_{t+1} es 0. En consecuencia, la condición de primer orden implica que

$$C_{t+1} = C_t + \xi_{t+1}, \tag{3.33}$$

se dice que C sigue un camino aleatorio (**random walk**)[31]. La característica importante de este proceso es que todos los *shocks* al consumo tienen efectos permanentes; es decir, no se deshacen. En otras palabras, si $C_{t+1} = \delta C_t + \xi_t$, con $\delta < 1$ —es decir, si es un proceso autorregresivo de orden 1— un *shock* tendrá efectos transitorios. Si el *shock* es unitario, C_{t+1} sube en 1, luego C_{t+2} sube en δ, C_{t+3} en δ^2, y así sucesivamente hasta que en el futuro distante el efecto del *shock* desaparece. Pero cuando δ es igual a uno —es decir, el proceso es un camino aleatorio— un *shock* unitario al consumo lo elevará en 1 desde que ocurre el *shock* en adelante, sin deshacerse. Es decir, los *shocks* tienen efectos permanentes.

Este resultado se puede generalizar más allá de la utilidad cuadrática. Lo importante de este resultado es que un individuo que en ausencia de incertidumbre tendría un consumo parejo; bajo incertidumbre el cambio de consumo de período a período no es predecible por cuanto sólo cambia como resultado de las noticias que se reciben en cada período, y estos cambios son permanentes.

La evidencia rechaza que el consumo siga un camino aleatorio. Una ruta más general para verificar empíricamente la validez de la teoría del CV/IP es estimar en los datos si se cumple la condición de primer orden (3.32). Esto involucra métodos estadísticos más sofisticados que regresiones lineales simples,

[30] El parámetro $\bar{C}$ es algo así como consumo de máxima felicidad (*bliss point*), y se postula para asegurar que $u' > 0$ y $u'' < 0$. No se puede suponer que la utilidad es $u(C) = C^2$, puesto que esta utilidad es convexa ($u'' > 0$) y, por lo tanto, el individuo no suavizaría consumo.

[31] En rigor, este proceso es una **martingala**, que no es más que un caso más general de camino aleatorio, ya que basta que el error sea no correlacionado serialmente y con media 0, pero no impone restricciones sobre la varianza, que en el caso del camino aleatorio es constante. Aquí sacrificamos un poco de rigor para adaptarnos al uso común de las expresiones y no ocupar mucho tiempo en detalles técnicos.

pero es posible recuperar parámetros de la función de utilidad. Por ejemplo si suponemos la función de utilidad CRRA descrita en 3.3.3, tenemos que la condición de primer orden es

$$C_t^{-\sigma} = \frac{1+r}{1+\rho}\mathrm{E}_t C_{t+1}^{-\sigma}, \tag{3.34}$$

de aquí podríamos estimar la elasticidad intertemporal de sustitución $(1/\sigma)$.

3.8.2. Ahorro por precaución

A continuación estudiaremos qué pasa con el ahorro cuando hay incertidumbre. Se demostrará, usando un caso muy simple, que ante la presencia de incertidumbre el consumo baja y el ahorro sube. Hay **ahorro por precaución**. El caso que se discute tiene ahorro 0 sin incertidumbre, pero cuando hay incertidumbre en el ingreso del período siguiente los individuos prudentes ahorran.

Consideremos un caso en que un individuo vive dos períodos, t y $t+1$, tiene una función de utilidad separable sin descuento ($U = u(C_t) + u(C_{t+1})$), recibe un ingreso igual a Y_t e Y_{t+1} en los períodos 1 y 2, respectivamente. La tasa de interés es cero.

Si los ingresos son iguales, es decir $Y_t = Y_{t+1} = Y$, es fácil ver que en el óptimo $C_t = C_{t+1} = Y$ y el ahorro es $S = 0$. Esto se ve del hecho las condiciones de primer orden, una vez que remplazamos la restricción presupuestaria de cada período nos lleva a

$$u'(Y_t - S) = u'(Y_{t+1} + S), \tag{3.35}$$

y al ser los ingresos iguales la solución debe ser $S = 0$.

Ahora consideremos el caso con incertidumbre que es algo más complejo. El individuo en t maximiza el valor esperado de la utilidad condicional en toda la información en t. Es decir:

$$\max_{C_t, C_{t+1}} u(C_t) + \mathrm{E}_t u(C_{t+1}). \tag{3.36}$$

Para facilitar la solución resolveremos el problema para el ahorro, es decir el individuo debe resolver

$$\max_S u(Y_t - S) + \mathrm{E}_t u(Y_{t+1} + S). \tag{3.37}$$

Para que el problema sea comparable al de sin incertidumbre asumiremos que el valor esperado de Y_{t+1}, que es lo único incierto, es igual a Y_t. Es decir, se espera ingreso parejo, pero el del segundo período es volátil. La condición de primer orden es:

$$u'(Y_t - S) = \mathrm{E}_t u'(Y_{t+1} + S). \tag{3.38}$$

Esta es la misma ecuación que (3.35), pero hay un valor esperado. Si u' fuera lineal, podemos entrar con el operador E_t al paréntesis y dado que el valor esperado de Y_{t+1} es igual a Y_t, llegamos a la misma solución: $S = 0$. Este es el caso de la utilidad cuadrática que al tener una derivada lineal llegamos a la conocida *equivalencia cierta*, es decir a un resultado donde la solución al problema con incertidumbre es igual al de con certeza.

No obstante esto no es muy realista. Para llegar a una solución con ahorro por precaución, asumiremos que $u''' > 0$. Que la tercera derivada sea positiva puede ser difícil de entender. Pero esto significa que la segunda derivada, la que está asociada a la curvatura de la función de utilidad y por lo tanto a la aversión al riesgo, es decreciente con el consumo. En otras palabras, mientras menos consumo, más averso al riesgo es el individuo. A esto se le llama *prudencia*. A bajos niveles de consumo se pondera más el riesgo[32].

De acuerdo a la **desigualdad de Jensen**, para una función convexa, como lo es la utilidad marginal del consumo u' (segunda derivada positiva) se tiene que $\mathrm{E}_t u'(X) > u'(\mathrm{E}_t(X))$, es decir es mayor el promedio de la función (utilidad marginal en este caso) de la variable aleatoria X que la función del promedio de la variable[33]. En consecuencia tenemos que $\mathrm{E}_t u'(Y_{t+1}+S) > u'(\mathrm{E}_t(Y_{t+1}+S))$, lo que remplazado en la condición de primer orden (3.38) y notando que $\mathrm{E}_t Y_{t+1} = Y_t$, nos da la siguiente desigualdad:

$$u'(Y_t - S) > u'(Y_t + S). \tag{3.39}$$

En el caso de certidumbre, o equivalencia cierta, esta expresión era con igualdad por lo tanto llegábamos a $S = 0$. Ahora debemos preguntarnos si S es positivo o negativo para que se cumpla la desigualdad. Como u' es decreciente ($u'' < 0$), el argumento del lado derecho debe ser menor al del lado izquierdo para que se cumpla la desigualdad. En consecuencia tenemos que S debe ser positivo. Cuando la función de utilidad exhibe prudencia, un aumento de la incertidumbre lleva a un aumento del ahorro. Esto es el ahorro por precaución.

---

[32] El lector puede verificar que la función CRRA discutida en la sección 3.3.3 cumple con la condición de prudencia. Asimismo la función de coeficiente de aversión absoluta al riesgo constante (CARA, *Constant absolute risk aversion*), que es de la forma $u(c) = -e^{-\alpha C_t}/\alpha$ también cumple con la restricción de prudencia. Caballero (1991) deriva una forma exacta para el ahorro por precaución cuando la utilidad es CARA. Para más detalles ver capítulo 6 de Jappelli y Pistaferri (2017).

[33] Esto es opuesto a una función cóncava, como lo es la función de utilidad. Por aversión al riesgo el individuo prefiere el promedio de la variable que el promedio de las utilidades.

3.8.3. *Buffer Stocks*

Las teorías de los *buffer stocks* derivan también ahorro precautorio a través de la combinación de restricciones de liquidez o períodos de ingresos muy bajos e incertidumbre. Los precursores de esta teoría son Angus Deaton y Christopher Carroll y no requiere restricciones a la función de utilidad como la necesidad de prudencia[34]. Sin embargo asume que los individuos son más impacientes que el mercado, es decir su tasa de descuento es mayor a la tasa de interés. La idea también fue planteada por Friedman, en cuanto los hogares desean tener una reserva de emergencia o un "colchón" de reserva.

Considere un hogar que en el futuro puede enfrentar períodos de muy bajos ingresos o restricciones de liquidez que lo obligue a tener un consumo muy bajo. Estos hogares desearían tener un nivel de riqueza como proporción de su ingreso permanente, que llamaremos $\underline{AYP}$, para afrontar esos episodios. Por arriba de este nivel de riqueza la impaciencia domina a la precaución y el consumo aumenta, reduciendo la riqueza. Sin embargo, cuando la riqueza está por debajo de $\underline{AYP}$, domina el ahorro por precaución, y el consumidor tratará de reconstruir su nivel de riqueza sacrificando consumo[35].

La teoría de los *buffer stocks* es analíticamente compleja y por lo general sus implicancias deben estimarse usando simulaciones numéricas pues los modelos no tienen soluciones sencillas. Sin embargo, su fundamento así como sus predicciones empíricas son muy realistas.

3.9. Teoría del consumo y precios de activos*

La teoría del consumo es ampliamente usada en teoría de finanzas. Esto es natural, puesto que los individuos son quienes demandan activos financieros para ahorrar y pedir prestado. Ellos también escogen distintos activos según sus necesidades para cubrir riesgos; es decir, usan el mercado financiero para asegurarse y tener un perfil suave de consumo cuando tienen un perfil variable de ingresos. En consecuencia, a partir de la teoría del consumo se podrían explicar los precios de los activos, que es lo que los individuos están dispuestos a

---

[34] Ver por ejemplo Deaton (1992) y Carroll (2001). El capítulo 7 de Jappelli y Pistaferri (2017) presenta un excelente resumen, a nivel más avanzado, de los *buffer stocks*. *Buffer* es un dispositivo que absorbe el impacto de un golpe y que se usa para las protecciones de los trenes en las estaciones.

[35] Otra alternativa teórica para explicar la alta correlación consumo-ingreso, y otras características del consumo de los hogares, es considerar "descuento hiperbólico", que explica por qué las preferencias por el largo plazo pueden entrar en conflicto con las decisiones de corto plazo. Ver Angeletos y col., 2001.

pagar por cierta combinación de riesgo y retorno. En esta sección discutiremos la determinación de los precios de los activos. A este respecto se analizarán dos temas importantes. El primero es el modelo CAPM (*capital asset pricing model*) de precios de activos y el segundo el *equity premium puzzle* (puzzle de premio de las acciones) y que explicaciones hay para dicho puzzle. Muchos de los resultados discutidos en esta sección son objeto de intensa investigación empírica, y como es de esperar, se han encontrado debilidades importantes. Por esta razón, ha habido también interesantes estudios que generalizan y refinan las características de la función de utilidad de los individuos y características de la economía que permitan mejorar el poder explicativo de la teoría del consumo. Los resultados no son definitivos, y la existencia de restricciones de liquidez sigue siendo un muy buen candidato para explicar las anomalías.

3.9.1. Precios de activos, el modelo CAPM y el puzzle del premio de las acciones

Suponga que un individuo tiene acceso a comprar un activo i con retorno incierto igual a r^i[36]. En este caso, la condición de primer orden descrita en la ecuación (3.32) es

$$u'(C_t) = \mathrm{E}_t\left[\frac{1+r^i}{1+\rho}u'(C_{t+1})\right]. \tag{3.40}$$

No podemos sacar el término $1+r^i$ del valor esperado, pues es incierto.

La expresión $u'(C_{t+1})/[(1+\rho)u'(C_t)]$ se conoce como el **factor de descuento estocástico** y lo denotaremos por M. En el caso de la tasa libre de riesgo, la condición de primer orden es $\mathrm{E}_tM = 1/(1+r)$. El término $1/(1+r)$ es el factor de descuento, cierto cuando r es libre de riesgo, entonces M es un factor de descuento basado en la conducta óptima del consumidor, y además es estocástico.

La condición de primer orden cuando el individuo compra un activo con retorno incierto i es

$$\mathrm{E}_t[(1+r^i)M] = \mathrm{E}_tM + \mathrm{E}_tr^iM = 1.$$

Dado que el valor esperado en una multiplicación de variables aleatorias es igual al producto de sus esperanzas más la covarianza, la expresión anterior es igual a[37]

$$\mathrm{E}_tM + \mathrm{E}_tr^iM = \mathrm{E}_tM + \mathrm{E}_tr^i\mathrm{E}_tM + \mathrm{Cov}(r^i,M) = 1.$$

---

[36] Para una revisión más profunda de estos temas, ver Cochrane (2005).

[37] Esto es consecuencia de que la covarianza entre X e Y se define como $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y$.

Esta condición se debe cumplir para todos los activos, en particular para el activo el libre de riesgo

$$(1 + r)\mathrm{E}_t M = \mathrm{E}_t M + r\mathrm{E}_t M = 1.$$

Combinando las dos últimas expresiones (igualando los dos términos del medio), tendremos que el diferencial de tasas, conocido también como *exceso de retorno*, estará dado por

$$\mathrm{E}_t r^i - r = -\frac{\mathrm{Cov}(r^i, M)}{\mathrm{E}_t M} = -\frac{\mathrm{Cov}(r^i, u'(C_{t+1}))}{\mathrm{E}_t u'(C_{t+1})}, \tag{3.41}$$

donde el último término se obtiene de simplificar el numerador y denominador por $1+\rho$ y $u'(C_t)$. los que se pueden sacar de los valores esperados, ya que son variables ciertas. Esta expresión nos permite derivar de la teoría de consumo el premio de un activo riesgoso por sobre el activo libre de riesgo. Si la covarianza del retorno y la utilidad marginal del consumo son negativas, entonces el premio (o prima) del activo será positivo. Dado que la utilidad marginal es decreciente en el consumo, podemos concluir que *cuando el retorno de un activo covaría positivamente con el consumo, requerirá pagar un premio positivo*. La razón de esto es que, si un activo paga más cuando el consumo es alto, no provee seguro contra caídas del ingreso, por lo tanto los consumidores estarán dispuestos a mantenerlo en su portafolio solo si provee un buen retorno. Es decir, este activo requerirá una prima por riesgo por sobre el retorno de un activo libre de riesgo.

Por otro lado, un activo que da un retorno alto cuando el consumo es bajo —es decir, la covarianza entre la utilidad marginal y el retorno es positiva— tendrá un retorno menor al libre de riesgo, porque además de servir como vehículo de ahorro, dicho activo provee también un seguro para los malos tiempos.

De la ecuación (3.41), podemos encontrar cuánto debería ser el precio de un activo cualquiera respecto de la tasa libre de riesgo. Para operacionalizar más esta relación, la teoría de finanzas ha propuesto el CAPM, que aquí lo explicaremos a partir de la teoría del consumo[38]. Suponga que existe un activo cuyo retorno, r^m, está perfectamente correlacionado negativamente con la utilidad marginal del consumo; es decir, $r^m = -\theta u'(C_{t+1})$. Podemos pensar que este activo es un portafolio que tiene todos los activos existentes en la economía, es decir, la cartera (o portafolio) del mercado. En consecuencia, la covarianza entre r^m y $u'(C_{t+1})$ será igual a la varianza de r^m, ($\mathrm{Var}(r^m)$), dividido por $-\theta$, lo que implica que el retorno de mercado tendrá un exceso de retorno

[38] Para más detalles, ver Blanchard y Fischer (1989), cap. 10.1.

positivo con respecto a la tasa libre de riesgo, pues covaría perfectamente con el consumo.

Por otro lado, la covarianza de un activo cualquiera con retorno r^i y $u'(C_{t+1})$ será igual a la covarianza de r^i y r^m dividido por $-\theta$. En la práctica, se usa el retorno del mercado accionario como r^m. En todo caso, es necesario destacar que el retorno de las acciones está positivamente correlacionado con el consumo, pero la correlación es más cercana a 0,4 en el caso de Estados Unidos [39].

Usando la ecuación (3.41) para el activo i y el portafolio de mercado, se obtiene [40]

$$\mathrm{E}_t r^i - r = \beta^i(\mathrm{E}_t r^m - r), \tag{3.42}$$

donde

$$\beta^i = \frac{\mathrm{Cov}(r^i, r^m)}{\mathrm{Var}(r^m)}. \tag{3.43}$$

Aquí la ecuación (3.42) se conoce como la ecuación de precios de activos del CAPM. Si un activo varía igual que el mercado, su retorno debiera ser el mismo. Si covaría positivamente con el mercado, pero es más volátil (la covarianza de su retorno con r^m es mayor que la varianza de r^m), su retorno debería ser mayor que el del mercado, pues requiere un premio para que el público lo mantenga ($\beta > 1$). Ahora bien, si un activo covaría positivamente con el mercado, pero su retorno es muy estable (la covarianza de su retorno con r^m es menor que la varianza de r^m), este retorno será menor que el del mercado y mayor que el retorno libre de riesgo, pues este es un activo más seguro que el mercado y, por tanto, tendrá una prima por riesgo menor ($0 < \beta < 1$). Por último, si un activo covaría negativamente, su retorno será menor que el retorno libre de riesgo, ya que este activo sirve, además, como seguro para cubrirse de riesgos ($\beta < 0$).

Además, como discutimos anteriormente, el retorno de este activo estará negativamente correlacionado con el consumo, y por lo tanto los individuos estarán dispuestos a recibir un retorno menor. En finanzas, es usual referirse a los β de los distintos activos, y se puede estimar escribiendo (3.42) en forma de regresión[41].

---

[39] Ver Campbell (2003).

[40] Para el activo i tendremos que $\mathrm{E}_t r^i - r = \mathrm{Cov}(r^i, r^m)/\theta \mathrm{E}_t u'(C_{t+1})$ y para el activo m se tiene que $\mathrm{E}_t r^m - r = \mathrm{Var}(r^m)/\theta \mathrm{E}_t u'(C_{t+1})$. Usando ambas ecuaciones para eliminar $\mathrm{E}_t u'(C_{t+1})$, se llega a la ecuación (3.42).

[41] En finanzas se habla de β de mercado, que son los que comparan correlaciones entre los retornos, y los β de consumo, que son aquellos en los cuales se correlaciona el retorno de un activo con el consumo directamente, más precisamente con C_{t+1}/C_t.

La ecuación (3.42) la podemos estimar empíricamente para ver los β's de distintos activos. En la práctica lo que se hace es estimar, con series de tiempo, el exceso de retorno como función del exceso de retorno del mercado:

$$r_t^i - r_t = \alpha^i + \beta^i(r_t^m - r_t) + \varepsilon_t. \tag{3.44}$$

donde ε es el error de la regresión. De esta ecuación podemos recuperar los β's, pero el lector notará que también la regresión tiene una constante α, la que en estimaciones no podemos suponer a priori que es cero. Si los mercados fueran eficientes α debiera ser cero, pero el hecho que no sea cero significa que habrá clases de activos que pueden rendir más que el premio dictado por su correlación con el mercado. La existencia de un limitado número de activos podría justificar un α positivo. Si los administradores de activos agregan valor a través, por ejemplo, de participar en la dirección de las compañías, sería posible tener un α positivo. En el mundo de las inversiones α es un indicador que se usa para evaluar la calidad de los administradores y sus estrategias de inversión.

3.9.2. El *equity premium puzzle* y desastres infrecuentes: Crisis financieras, pandemias y desastres naturales

La ecuación (3.41) puede desarrollarse más, haciendo algunos supuestos sobre la distribución del crecimiento del consumo y la función de utilidad. Así, es posible estimar el exceso de retorno del mercado accionario respecto de la tasa libre de riesgo predicho por la teoría. Este ejercicio fue realizado en un estudio ya clásico realizado por Mehra y Prescott (1985). Usando una función CRRA, Mehra y Prescott (1985) plantean que el premio del mercado accionario es muy elevado. En los Estados Unidos, entre 1889 y 1978 la tasa libre de riesgo (bonos del tesoro de tres meses en la actualidad) es de 0,8 %, mientras que el retorno del mercado accionario fue de 6,98 %, lo que da un premio —o retorno en exceso— de 6,18 %. Calibrando la ecuación según parámetros razonables, daría una prima de 1,4 %, muy inferior a la encontrada en los datos. Esto se conoce como el ***equity premium puzzle***. Para ser consistente con la teoría, se requeriría un coeficiente de aversión al riesgo muy alto, lo que no es consistente con la evidencia empírica. Este retorno excesivo se ha mantenido en el tiempo y en otros países[42].

Los problemas encontrados para explicar los precios de los activos, así como otras dificultades para explicar y comprobar la teoría de consumo, han llevado

[42] Para más detalles, ver Campbell (2003), y en especial Cochrane (2005), caps. 1 y 21.

a muchas investigaciones a proponer funciones de utilidad que, con el costo de una mayor complejidad, puedan explicar mejor la realidad.

Uno de los principales problemas se relaciona con la separabilidad de la función consumo, pues hemos supuesto que la utilidad es $u(C)$, cuando puede tener más argumentos que no podemos tratar separadamente[43]. Una forma de romper la separabilidad es considerar el consumo de bienes durables. En este caso, comprar un bien durable hoy provee utilidad por muchos períodos. También se ha propuesto la importancia de los hábitos. En tal situación, la utilidad no depende del consumo presente, sino del consumo presente respecto del consumo pasado. Por ejemplo, el argumento de u podría ser $C_t - \gamma C_{t-1}$, donde γ es mayor que 0 y menor que 1. En este caso, el consumo presente vale más si el pasado fue bajo.

Otras modificaciones a la función de utilidad han intentado separar la actitud frente al riesgo de la preferencia por sustituir intertemporalmente. En el caso de la función CRRA, la aversión al riesgo es σ y la EIS es $1/\sigma$. Ciertamente no podemos suponer elevada sustitución intertemporal y alta aversión al riesgo. Es posible efectuar esta separación a costa de tener una función de utilidad más compleja, como la conocida de Epstein-Zin. Asimismo, se ha planteado la idea de que el factor de descuento sea variable.

Cabe destacar que no solo podemos entender mejor la función consumo cambiando su evolución, sino también por otras características de la economía. A este respecto cabe destacar dos. La primera, que se nos ha repetido sistemáticamente, corresponde a las restricciones de liquidez; es decir, a la incapacidad de los consumidores de pedir prestado para suavizar consumo. Esto los obliga a ahorrar para tiempos malos, lo que, entre otras cosas, afectará el precio de los activos. En segundo lugar está la heterogeneidad de los consumidores. Hasta ahora hemos trabajado con el consumidor —u hogar— representativo. Trabajar con heterogeneidad, aunque analíticamente es mucho más complejo, también nos puede ayudar a entender mejor el consumo. Ya vimos, por ejemplo, que los factores demográficos pueden ser importantes a la hora de explicar las diferencias en las tasas de ahorro entre países.

En años recientes, y con mayor intensidad después de la crisis financiera internacional, mucho esfuerzo se ha hecho para entender el efecto que tienen los **desastres infrecuentes (*rare disasters*)** en los mercados financieros, en particular en los precios de activos y su volatilidad. La idea original fue propuesta en 1988 por Thomas Reitz y luego retomada por Robert Barro a mediados de los 2000, dando lugar a una prolífica agenda de investigación[44].

---

[43] Para mayor discusión, ver Attanasio (1999).

[44] Ver por ejemplo Barro y Ursúa (2011) y Tsai y Wachter (2015)

Intuitivamente, en la ecuación (3.41) pueden ocurrir eventos en los cuales el retorno de los activos y el consumo están muy negativamente correlacionados. En los desastres el consumo puede caer más de 10 %, la medida usual usada para definir desastres. Aunque son eventos infrecuentes, ellos son probables, y eso debiera aumentar el premio de las acciones. Este premio podría aparecer excesivo en tiempos normales, pero estaría compensando por la probabilidad de desastres. En el mundo los hemos tenido desde la Gran Depresión, la segunda guerra mundial, y la crisis financiera internacional, entre otros. En economías emergentes están la crisis de la deuda en América Latina, la crisis Asiática, y muchos otros episodios particulares a países. En esos episodios las pérdidas de los inversionistas y las caídas en consumo son muy costosas. Esto derriba el supuesto de que los retornos son distribuidos normalmente, ya que en este caso los desastres tendrían una probabilidad bajísima. En cambio, la probabilidad de desastres es baja pero no despreciable, por ejemplo niveles de 2 o 3 % por año. Esto ha llevado muchos a sugerir que la distribución tiene *cola gordas (fat tails)*, es decir los eventos extremos son más probables.

Los desastres infrecuentes han sido usados también para explicar otra anomalías en finanzas. Por ejemplo la alta volatilidad de las acciones y las bajas tasas de interés después de los desastres. Después de la crisis financiera internacional los retornos de los bonos han sido muy bajos, en particular en las economía avanzadas. Es decir la tasa libre de riesgo ha caído. Existen otras razones para explicar este fenómeno que debieran quedar claras más adelante. Por ejemplo débiles perspectivas económicas que deprimen la inversión, o el envejecimiento de la población que aumenta el ahorro para la vejez durante esta transición demográfica[45]. Pero la crisis puede haber llevado a los inversionistas financieros a aumentar su percepción de ocurrencia de los desastres. En ese caso ellos aumentarían la demanda por activos seguros, bonos de gobierno, por los cuales estaría dispuestos a pagar un mayor precio y recibir un menor retorno. Estos argumentos deberían quedar claros una vez que hayamos discutido mercados financieros en el capítulo **??**.

Otra aplicación interesante en macroeconomía es explicar los tipos de cambio, en particular las desviaciones de la paridad de tasas de interés internacional. Si una moneda se espera que pueda sufrir un repentino cambio brusco, puede transarse con un descuento. Esto sugeriría que comprar la moneda es una opción barata, pero después del desastre la operación financiera puede ser un desastre. Esto es conocido hace muchos años en finanzas internacionales y

---

[45] En el largo plazo si la población es más vieja uno esperaría que haya menos ahorro por cuanto la fracción de jóvenes, que son quienes ahorran en el ciclo de vida baja. No obstante, la transición del envejecimiento puede ser suficientemente larga como para que durante ella domine el mayor ahorro de quienes están cerca de la jubilación.

permite explicar el conocido ***peso problem***[46], en referencia al peso mexicano en los 70. El peso mexicano estaba fijo al dólar pero tenía una prima de riesgo implícita que no tenía explicación, salvo que podía ocurrir una devaluación improbable pero elevada, que fue lo que ocurrió. Esto será discutido de nuevo en el capítulo **??**.

[46] Esta explicación fue propuesta por Lizondo (1983).

Referencias

Angeletos, George-Marios y col. (2001), "The Hyperbolic Consumption Model: Calibration, Simulation, and Empirical Evaluation". *Journal of Economic Perspectives* Vol. 15, No. 3, pp. 47-68.

Attanasio, Orazio P. (1999), "Consumption". *Handbook of Macroeconomics* Vol. 1, pp. 741-812.

Barro, Robert J. y José Ursúa (2011), "Rare Macroeconomic Disasters". NBER Working Paper No. 17328.

Bean, Charles y col. (2015), *Low for Long? Causes and Consequences of Persistently Low Interest Rates*. Geneva Reports on the World Economy 17. CMB Internationa Center for Monetary y Banking Studies.

Blanchard, Olivier J. y Stanley Fischer (1989), *Lectures on Macroeconomics*. MIT press.

Browning, Martin y Annamaria Lusardi (1996), "Household Saving: Micro Theories and Micro Facts". *Journal of Economic Literature* Vol. 34, No. 4, pp. 1797-1855.

Caballero, Ricardo (1991), "Earnings Uncertainty and Aggregate Wealth Accumulation". *Amercian Economic Review* Vol. 81, pp. 850-871.

Campbell, John Y. (2003), "Two Puzzles of Asset Pricing and their Implications for Investors". *The American Economist* Vol. 47, No. 1, pp. 48-74.

Carroll, Christopher D. (2001), "A Theory of the Consumption Function, With and Without Liquidity Constraints". *Journal of Economic Perspectives* Vol. 15, No. 3, pp. 23-45.

Carvalho, Carlos, Andrea Ferrero y Fernardo Nechio (2016), "Demographics and Real Interest Rates: Inspecting the Mechanism". *European Economic Review* Vol. 88, pp. 208-226.

Cochrane, John H. (2005), *Asset Pricing*. Revised Edition. Princeton University Press.

De Gregorio, José, Pablo Guidotti y Carlos Végh (1998), "Inflation Stabilization and the Consumption of Durable Goods". *Economic Journal* Vol. 108, No. 446, pp. 105-131.

Deaton, Angus (1992), *Understanding Consumption*. Oxford University Press.

— (2005), "Franco Modigliani and the Life Cycle Theory of Consumption". *Available at SSRN 686475*.

Gourinchas, Pierre-Olivier y Jonathan A. Parker (2002), "Consumption over the Life Cycle". *Econometrica* Vol. 70, No. 1, pp. 47-89.

Hall, Robert E. (1978), "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence". *Journal of Political Economy* Vol. 86, No. 6, pp. 971-987.

Iacovello, Matteo (2005), “House Prices, Borrowing Constraints and Monetary Policy in the Business Cycle”. *American Economic Review* Vol. 95, No. 3, pp. 739-764.

Jappelli, Tulio y Luigi Pistaferri (2017), *The Economics of Consumption. Theory and Evidence*. Oxford University Press.

Lizondo, José Saúl (1983), “Foreign Exchange Futures Prices Under Fixed Exchange Rates”. *Journal of International Economics* Vol. 14, No. 1-2, pp. 69-84.

Mehra, Rajnish y Edward C. Prescott (1985), “The Equity Premium: A Puzzle”. *Journal of Monetary Economics* Vol. 15, No. 2, pp. 145-161.

Modigliani, Franco (1986), “Life Cycle, Individual Thrift, and the Wealth of Nations”. *American Economic Review* Vol. 76, No. 3, pp. 297-313.

Muellbauer, John N. (2007), “Housing, Credit and Consumer Expenditure”. *Housing, Housing Finance, and Monetary Policy*. Federal Reserve of Kansas City, Jackson Hole Economic Symposyum Conference Proceedings pp. 267-334.

Mulligan, Casey B. y Xavier Sala-i-Martin (1999), “Gerontocracy, Retirement, and Social Security”. NBER Working Paper No. 7117.

Schmitt-Grohe, Stephanie, Martin Uribe y Michael Woodford (2016), *International Macroeconomics*. Libro no publicado, Universidad de Columbia.

Tsai, Jerry y Jessica A. Wachter (2015), “Disaster Risk and its Implications for Asset Pricing”. NBER Working Paper No. 20926.

Problemas

Problema 3.1. Ciclos de auge y recesión.
En una economía solo se producen manzanas, un bien cuyo precio (real) internacional es estable.

Se estima que en los próximos siete años habrá cosechas excepcionalmente buenas, luego otros siete años con cosechas particularmente malas, y finalmente las cosechas se normalizarán. La producción *promedio* de manzanas durante los catorce años será la misma que antes y después de este período.

(a) ¿Qué puede aconsejar a esta economía a partir del resultado de *suavizamiento del consumo*? Suponga que este país no afecta el precio mundial de las manzanas y que además puede ahorrar en el extranjero a una tasa de interés (real) positiva.

(b) Determine si el estándar de vida mejorará después del período de catorce años.

(c) ¿Cómo cambia su respuesta a la parte (b) si la tasa de interés real es 0?

(d) ¿Cómo cambia su respuesta a la parte (b) si la producción de manzanas de esta economía afecta el precio mundial de las manzanas?

Problema 3.2. Consumo y tasa de interés.
Considere un individuo que vive por dos períodos y maximiza la siguiente función de utilidad

$$U = \log C_1 + \beta \log C_2, \tag{3.45}$$

donde C_i es el consumo el período i con $i = 1, 2$, $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ y representa el factor de descuento intertemporal y ρ la tasa del descuento (que refleja sus preferencia por el futuro respecto del presente). El individuo recibe flujos de ingreso Y_1 e Y_2 en los períodos 1 y 2, respectivamente.

Supondremos que hay una tasa de interés r. La tasa de descuento es igual a la tasa de interés r, en todo momento (o sea r y ρ se mueven juntos; esto es una simplificación para facilitar la solución del problema, y le permite reemplazar en todo el problema ρ por r).

(a) Escriba la restricción presupuestaria intertemporal del individuo y encuentre las expresiones para el consumo y el ahorro individual S en ambos períodos como función de los flujos de ingreso y la tasa de interés. ¿Qué pasa con el ahorro cuando $Y_1 = Y_2$? ¿Por qué?

(b) Ahora estudiaremos el impacto de un cambio en la tasa de interés sobre el ahorro, en los casos extremos. Conteste:

i. ¿Cuál es el signo del impacto de un aumento en la tasa de interés sobre el ahorro (sube o baja), cuando todo el ingreso se recibe en el período 1, es decir, $Y_2 = 0$? Explique su resultado.

ii. ¿Cuál es el signo del impacto de un aumento en la tasa de interés sobre el ahorro (sube o baja), cuando todo el ingreso se recibe en el período 2, es decir, $Y_1 = 0$? Explique su resultado.

Problema 3.3. Seguridad social.

Considere una economía donde todos los agentes se comportan según la teoría del ciclo de vida o del ingreso permanente. Suponga que el gobierno obliga a todos a ahorrar una fracción de su ingreso (que se llama cotización previsional). ¿Cuál cree usted que será el efecto sobre el ahorro (comparado con el caso en el cual a nadie se le exige ahorrar) de la economía en las siguientes situaciones:

(a) Todos los agentes tienen pleno acceso al mercado financiero y pueden pedir prestado o ahorrar todo lo que quieran a una tasa de interés dada (igual a la del retorno del fondo de pensiones).

(b) Hay una fracción importante de agentes (jóvenes), que no pueden pedir prestado todo lo que quisieran.

(c) En el caso anterior, ¿cómo podría variar su respuesta si los padres se preocupan por el bienestar de sus hijos y les pueden transferir recursos mientras están vivos (es decir, no solo a través de la posible herencia)?

(d) Considere ahora el siguiente supuesto sobre el comportamiento de las personas: cuando llegan a la edad de jubilar y dejan de trabajar, ellos *saben* que el gobierno no los dejará morir de hambre y les proveerá transferencias en caso de que no tengan ingresos. Suponga en este contexto que el gobierno obliga a la gente a ahorrar y le entrega el dinero solo cuando jubilan. ¿Qué cree usted que pasa con el ahorro? ¿Le parece esta una racionalización útil para justificar la existencia de un sistema de pensiones?

Problema 3.4. Rest. de liquidez.

En este problema estudiaremos cómo las restricciones de liquidez y la existencia de sistemas de seguridad social afectan el bienestar de los individuos. Para ello, supondremos una economía compuesta por tres clases de individuos: jóvenes, desde el nacimiento hasta los 20 años; adultos, desde los 21 hasta los 60, y viejos, desde los 61 hasta los 70, edad a la cual mueren. Cada año nace un nuevo joven y muere un viejo[47].

Los individuos reciben anualmente ingresos iguales a Y_A cuando son adultos, mientras que cuando son jóvenes reciben $Y_J = \frac{1}{4}Y_A$ al año, y en la vejez su ingreso es igual a $Y_V = \frac{1}{5}Y_A$ anuales.

La función de utilidad de los habitantes de esta economía viene dada por

$$U = \sum_{t=1}^{70} \log C_t$$

Donde C_t representa el consumo en cada período. Considere para todo el problema que $r = \rho = 0$ (ρ es la tasa de descuento).

(a) Suponga que los individuos no enfrentan restricciones de liquidez. Escriba el problema de optimización que afronta el individuo, incorporando la restricción presupuestaría (ésta última no es necesario deducirla) y obtenga el consumo óptimo $\overline{C}_t$ para cada período. Derive expresiones para el ahorro s_t a lo largo de la vida del individuo y para el ahorro agregado S_t.

(b) Suponga ahora que, durante su juventud, los individuos enfrentan restricciones de liquidez, de forma tal que no se pueden endeudar. Escriba el problema de optimización que enfrenta el individuo en este caso y calcule la trayectoria óptima del consumo $\overline{C}_t$, el ahorro s_t y el ahorro agregado de la economía S_t. ¿Cómo se compara con el calculado en la parte (a)?

(c) Calcule la utilidad de los individuos en los casos (a) y (b). ¿En qué caso es mayor la utilidad? Explique su resultado[48].

(d) Discuta qué sucede con el ahorro agregado en caso que la población crezca a una tasa de $n\,\%$ anual[49] cuando no hay restricción de liquidez y

---

[47] De esta forma, en la economía *siempre* hay 70 individuos: 20 jóvenes, 40 adultos y 10 viejos.

[48] Ayuda: Puede serle útil recordar que, en el caso de funciones cóncavas, se cumple la relación $f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.

[49] Es decir, si en el año t nacen P_t personas, entonces en $t+1$ nacen $P_{t+1} = (1+n)P_t$.

cuando sí la hay. ¿Están mejor los individuos cuando la economía tiene mayor capacidad de ahorro?

(e) Suponga ahora que los individuos no tienen restricciones de liquidez, pero se ven forzados a pagar un impuesto de suma alzada $\tau = \frac{1}{6}Y_A$ durante su juventud y adultez que se les devuelve íntegramente en forma de transferencia al llegar a la vejez. Calcule nuevamente las trayectorias de ahorro y consumo.

¿Tiene algún efecto sobre la conducta del individuo este mecanismo de seguridad social? ¿En qué casos se podría justificar la existencia de mecanismos de seguridad social?

Problema 3.5. Relación entre ahorro presente e ingreso futuro.
La evidencia indica que, luego de un período en que el ahorro es bajo, a menudo viene un período en que los ingresos son altos. En este problema usamos la teoría IP/CV del consumo para explicar este fenómeno.

Considere un consumidor que vive dos períodos, con función de utilidad $U(C_1,C_2)$, donde C_1 y C_2 denotan consumo en los períodos 1 y 2, respectivamente[50]. Los ingresos en los períodos 1 y 2 son Y_1 y Y_2, respectivamente, y el ahorro correspondiente es $S = Y_1 - C_1$. Finalmente, suponemos que el consumidor puede endeudarse y ahorrar a una tasa r, y que no deja herencia.

(a) ¿Puede la función keynesiana de consumo explicar el fenómeno observado? Justifique cuidadosamente.

(b) Muestre gráficamente los niveles óptimos de consumo que el individuo elegirá en cada período para valores dados (positivos) de Y_1 y Y_2. Le sugerimos tomar Y_1 mucho *mayor* que Y_2, de modo que en el período 1 haya ahorro y no endeudamiento. Indique en la figura el ahorro en el período 1.

(c) Manteniendo Y_1 fijo, incremente Y_2 y vuelva a determinar el ahorro durante el período 1. Le sugerimos mostrar el ahorro antes y después del aumento de ingreso en la misma figura. Concluya que mientras mayor es el ingreso futuro que espera el consumidor, menor será su tasa de ahorro corriente.

[50] Las curvas de indiferencia (en el plano (C_1,C_2)) tienen forma convexa. Además, el consumo en ambos períodos es un bien normal.

(d) Argumente claramente por qué su derivación gráfica no depende de su particular elección de Y_1, Y_2, r, y $U(C_1,C_2)$.

Problema 3.6. Más consumo intertemporal.

Considere una persona que vive dos períodos, t y $t+1$, y sus ingresos son de 100 y 150 respectivamente. Si la tasa de interés es del 15 %:

(a) Determine la restricción presupuestaria de este individuo y grafíquela.

(b) Suponga que a esta persona le interesa tener el mismo consumo en ambos períodos. Encuentre el valor de éste.

(c) Si las preferencias de este individuo son tales que desea consumir el doble del primer período t en el período $t+1$, identifique el consumo en t y $t+1$.

(d) Explique conceptual y matemáticamente qué ocurre con el consumo de cada período si la tasa de interés aumenta a 20 %. Las preferencias de consumo del individuo se mantienen como en la parte (c).

(e) Identifique en un mismo gráfico los resultados obtenidos en las partes (b) y (c), y explique los cambios ocurridos en el consumo debido a las variaciones de la tasa de interés.

(f) Suponga ahora que el gobierno ha instaurado un nuevo impuesto de suma alzada de 50 en cada período. Encuentre la nueva restricción presupuestaria considerando una tasa del 15 % y grafique.

(g) Si la estructura de impuesto se mantiene de igual forma y el individuo desea consumir 40 en el primer período:

i. ¿Cuál es el consumo en $t+1$?

ii. ¿Cómo cambia la recta presupuestaria si los impuestos cambian de estructura y se cobra 60 en t y 40 en $t+1$?

iii. ¿Cómo cambia el consumo en ambos períodos?

Problema 3.7. Consumo y restricciones de liquidez.
Considere un consumidor que vive dos períodos y cuyas preferencias son representadas por una función de utilidad $U(C_1,C_2)$, donde C_1 y C_2 denotan consumo en el primer y segundo período, respectivamente, y la utilidad no es necesariamente separable.

Los ingresos del consumidor en los períodos 1 y 2 son Y_1 y Y_2, respectivamente, y no hay incertidumbre.

El consumidor puede endeudarse a una tasa r_D y puede ahorrar a una tasa r_A, con $r_A < r_D$.

(a) Dibuje la restricción presupuestaria del consumidor en el plano (C_1,C_2). Concluya que ésta se compone de dos rectas e identifique la pendiente de cada una de ellas.

(b) Determine condiciones necesarias y suficientes para que la trayectoria de consumo óptima sea (Y_1,Y_2). Estas condiciones debieran ser dos desigualdades en términos de la función $u(C_1,C_2)$ y sus derivadas parciales evaluadas en (Y_1,Y_2) y ambas tasas de interés.

(c) ¿En qué se traducen las condiciones de la parte anterior cuando $u(C_1,C_2)$ es aditivamente separable?

(d) Considere las condiciones de desigualdad derivadas en la parte (b) y suponga ahora que estas desigualdades se cumplen estrictamente. Muestre gráficamente que si Y_1 aumenta en una cantidad pequeña, ΔY_1, entonces $\Delta C_1/\Delta Y_1 = 1$ y $\Delta C_2/\Delta Y_1 = 0$, lo que resulta mucho más cercano a lo que predice la función de consumo keynesiana que lo que se infiere de las teorías racionales del consumo.

(e) Notando que la brecha entre r_D y r_A es mayor en países en desarrollo, discuta utilizando sus resultados de las partes anteriores, si las restricciones de liquidez son más relevantes en países en desarrollo o en países industrializados.

(f) Notando que el caso de restricción total de liquidez (no hay acceso a crédito) corresponde a $r_D = +\infty$, vuelva a responder las partes anteriores para este caso.

Problema 3.8. Ahorro y crecimiento.
Considere un individuo que vive por tres períodos: en el período 1 su ingreso es $Y_1 = Y$, y en el período 2 el ingreso crece a una tasa γ, es decir $Y_2 = Y(1+\gamma)$. Finalmente, en el período 3 se jubila y no tiene ingresos, o sea $Y_3 = 0$. La tasa de interés en la economía es 0. Por otra parte su utilidad es tal que siempre querrá un consumo parejo durante toda su vida (es decir, $C_1 = C_2 = C_3$).

(a) Calcule el consumo y ahorro (S_1, S_2 y S_3) en cada período.

(b) Suponga que en esta economía no hay crecimiento de la población. Tampoco crecen los ingresos entre generaciones. ¿Qué pasa con el ahorro agregado en cada momento? Interprete su resultado.

(c) Suponga que se introduce un sistema de pensiones donde se obliga a cada individuo joven y en edad media a ahorrar una magnitud A, y le devuelven $2A$ cuando viejo. ¿Qué pasa con el ahorro de los individuos? ¿Tiene alguna implicancia sobre el ahorro o la conducta de los individuos la introducción de un sistema de seguridad social?

(d) Suponga que la población crece a una tasa n. Calcule el ahorro agregado de la economía (cuide de ponderar adecuadamente el ahorro de cada generación).

(e) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del ingreso agregado en esta economía? Muestre cómo varía (sube o baja) el ahorro agregado con un aumento en la tasa de crecimiento de esta economía. Interprete su resultado, y compárelo con el obtenido en (b).

(f) Suponga que esta economía es una buena descripción del mundo y un economista grafica las tasas de ahorro versus las tasas de crecimiento de todas las economías. Después de ver el gráfico, concluye: "La evidencia apoya definitivamente la idea que para crecer más hay que ahorrar más". Comente esta conclusión en dos dimensiones: ¿Es cierto lo que ve en los datos? De ser así, ¿es correcta la conclusión?

Problema 3.9. Consumo e incertidumbre
Considere un individuo que vive dos períodos, cuya función de utilidad en cada período viene dada por $u(c)$ y que recibe un ingreso Y_1 en el primer período. En el segundo período recibe un ingreso Y_2^A con probabilidad p y un ingreso de Y_2^B con probabilidad $(1-p)$. La incertidumbre respecto al ingreso en el período 2 se resuelve después que se ha decidido el consumo en el período 1

y antes de decidir el consumo en el período 2. La tasa de interés es positiva e igual a r. La tasa de descuento es igual a ρ. Asuma que $(1+r) = (1+\rho)$.

(a) Derive la condición de optimalidad para el consumo.

(b) Asumiendo que la función de utilidad $u(c) = bc - \left(\frac{a}{2}\right)c^2$, donde c es el consumo, derive el consumo en cada período en términos de los ingresos. ¿Cómo se compara el nivel de consumo en el período 1 con el consumo esperado en el período 2?. Explique sus respuestas.

(c) Derive el consumo en ambos períodos si la utilidad de los individuos es $u(c) = \log c$. Para simplificar asuma que $Y_2^A = Y_1$, $Y_2^B = 0$ y que $r = 0$.¿Qué ocurre con el consumo en el período 1 si aumenta p?

(d) Compare sus resultados en (b) y (c). En particular, obtenga expresiones para el consumo en el período 1 en ambos casos (función cuadrática y función logarítmica). ¿Por qué se produce una diferencia en dicho consumo? Para obtener expresiones comparables utilice los supuestos para el ingreso en el período 2 y la tasa de interés de la letra (c) y asuma adicionalmente que $p = 0{,}5$.

Problema 3.10. Consumo mínimo.

Considere un individuo que vive dos períodos, cuya función de utilidad es separable y en cada período viene dada por $u(c_1) = \ln(c_i - \bar{c}_i)$. El individuo recibe un ingreso de y_i en cada período. Su factor de descuento (para la utilidad) es β y la tasa de interés es r. Para que el ejercicio sea interesante asumiremos que:

$$y_1 + \frac{y_2}{1+r} > \bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{1+r} \tag{3.46}$$

(a) Interprete la función de utilidad. Explique en palabras por qué es útil suponer que (3.46) se cumple.

(b) Obtenga el consumo en el período 1. ¿Qué pasa con c_1 cuando aumentan (separadamente): $\bar{c_1}$, $\bar{c_2}$, y_1 e y_2.

(c) Determine el consumo en el período 2 y explique qué pasa con el consumo en el período 2 cuando la tasa de interés sube.

(d) Determine cuánto es el ahorro (S) y explique que pasa con el ahorro cuando la tasa de interés aumenta, distinguiendo si $y_2 - \bar{c}_2$ es mayor, menor o igual a cero. Explique su resultado, usando también el resultado de la parte (c). Discuta también la afirmación que dice que mientras más pobre es la economía menores serán sus niveles de ahorro. ¿Cómo interpreta esto desde el punto de vista del modelo?

Nota: trate de escribir sus expresiones, en la medida de lo posible, usando los términos $y_i - \bar{c}_i$. Esto facilitará interpretar los resultados.

Problema 3.11. Consumo intertemporal y CAPM.

Suponga que las preferencias de un agente representativo de la economía se representan por medio de la siguiente función de utilidad:

$$U(c_i) = \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

Considere que el consumidor recibe ingresos y_1 e y_2 para el período 1 y 2 respectivamente. Adicionalmente, ahorra en el primer período un monto s y la tasa de interés libre de riesgo es r.

(a) Encuentre el consumo óptimo de cada período.

(b) Como depende el ahorro de la tasa de interés. Discuta su resultado, en particular compárelo con el caso en que el individuo recibe ingresos solo el periodo 1.

(c) Suponga que el individuo no tiene certeza sobre el futuro ($t = 2$). Plantee nuevamente el problema a maximizar y reescriba la condición de primer orden (ecuación de Euler) incorporando el componente estocástico.

(d) Suponga que en los datos se ha encontrado la siguiente relación:

$$u'(c_2) = \frac{r^j}{c_1}$$

donde r^j es la tasa de retorno de un activo riesgoso.

A partir de lo anterior, use la ecuación del modelo CAPM visto en clases para determinar el exceso de retorno del activo riesgoso (Hint: esto es la diferencia enter el retorno del activo riesgoso (j) y el activo libre de riesgo).

(e) Suponiendo que la varianza del activo j es igual a 0,5 y el retorno libre de riesgo es de 10 %, obtenga el retorno promedio que entrega el activo. Si la varianza aumenta a 1,5, ¿el retorno debería subir o bajar? Calcule y explique intuitivamente.

Problema 3.12. Consumo y ahorro.
Considere una economía poblada por tres tipo de individuos: n_1 jóvenes que tienen un ingreso individual igual a Y_1, n_2 adultos con ingreso individual igual a Y_2, y n_3 jubilados con un ingreso $Y_3 = 0$. la población crece, de modo que $n_1 > n_2 > n_3$ [51]. Suponga además que el mayor ingreso se obtiene cuando adulto pero no es excesivamente alto respecto de los jóvenes, es decir asumiremos que $Y_2 > Y_1 > Y_2/2$. Suponga además que los individuos siempre quieren tener consumo igual para todos los períodos. La tasa de interés es cero.

(a) Suponga solo para esta parte que $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Calcule el ahorro de cada individuo y el ahorro agregado.

(b) Suponga ahora una población que crece, es decir $n_1 > n_2 > n_3$. Calcule el ahorro agregado y compárelo con su resultado en (a). ¿Por qué el supuesto $Y_1 > Y_2/2$ es relevante.

(c) Aumento en el crecimiento de la población: suponga que la población joven aumenta, y para no enredarnos con el tamaño de la población, la población retirada cae en la misma magnitud: $\Delta n_1 = -\Delta n_3 > 0$ (n_2 no cambia). ¿Qué pasa con el ahorro agregado?¿Y con la tasa de ahorro? ¿Qué se puede esperar entonces que pase en economías con fuerte aumento de la población sobre las tasas de ahorro?¿Y en economías donde la educación está mejorando?.

(d) Envejecimiento: suponga ahora que $\Delta n_3 = -\Delta n_2 > 0$ (n_1 no cambia). ¿Qué pasa con el ahorro agregado?¿Y con la tasa de ahorro?¿Qué implicancias tiene esto sobre un sistema de pensiones basado en reparto?

(e) Restricciones al endeudamiento (de liquidez): Suponga ahora que $Y_1 = Y_3 = 0$ e $Y_2 = Y$. El individuo no se puede endeudar todo lo que quisiera, a lo sumo los bancos le prestan α veces su ingreso futuro. Suponemos que $\alpha < 1/3$. Para simplificar, supondremos $n_1 = n_2 = n$ y $n_3 = 1$. Si el individuo cuando no tenga restricciones seguirá consumiendo parejo, determine su consumo y ahorro en cada período. Determine el ahorro total y la tasa de ahorro en esta economía. ¿Cómo depende el ahorro de n y de las restricciones al endeudamiento α?

(f) Basado en sus respuestas discuta lo siguiente: Se argumenta que dada la alta correlación ahorro-crecimiento, es necesario estimular el ahorro para crecer más y una buena forma de hacer esto es imponer restricciones al

[51] Note que n_i es número de personas, no tasa de crecimiento.

endeudamiento de las personas. Nota: Piense en que tipo de función de utilidad da origen a esta conducta de consumo parejo.

Problema 3.13. Consumo y endeudamiento.
Considere un individuo que vive 3 periodos ($t = 1{,}2{,}3$) donde su nivel de Ingreso (Y_t) es de 200, 500 y 200 en cada periodo. Considere además que el indiduo posee una función de utilidad de la forma $U(c_1{,}c_2{,}c_3) = ln(c_1) + \beta ln(c_2) + \beta^2 ln(c_3)$ donde C_i es el consumo en el periodo i y β el factor de descuento intertemporal que asumiremos igual a 1. Dentro de la economía la tasa de interés real es 0 ($r = 0$), el individuo no posee riqueza inicial ($A_0 = 0$). En base a esta información responda las siguientes preguntas:

(a) Suponiendo que el individuo maximiza su nivel de utilidad. Calcule el nivel de consumo para cada periodo, además encuentre la trayectoria de ahorro.[52]

(b) Considere ahora que por problemas dentro de la economía, el individuo recibe un shock negativo en su ingreso del periodo 2, por lo cuál este cae a un 40 %. Encuentre la trayectoria de consumo y de ahorro si el indiviuo puede anticipar este shock, es decir, en el periodo 1 sabe con certeza que este ocurrirá. Luego encuentre ambas trayectorias (consumo y ahorro) si el shock lo pilla de imprevisto en $t = 2$. En ambos casos utilice los supuestos anteriores.

(c) El individuo ahora sabe que existe probabilidad de que hayan malas condiciones en el futuro, por lo cual, ahora para prevenir un cambio abrupto en su consumo, el individuo decide como tasa máxima de endeudamiento (Deuda sobre ingreso de cada periodo) para el periodo $t = 1$ un 20 %. Encuentre la trayectoria de consumo y ahorro si es que ocurre y si es que no ocurre el shock.

(d) Ahora el individuo sabe que la probabilidad de que ocurra el shock negativo en $t = 2$ es de un 70 %, pero además sabe que para el otro 30 % el shock puede ser positivo y su ingreso en $t = 2$ aumentará un 40 %. Encuentre la trayectoria esperada de consumo y de ahorro sin considerar la regla de apalancamiento de la pregunta anterior.

(e) Finalmente suponga que el shock ahora pasa a ser permanente con una probabilidad de p, mientras que con una probabilidad $(1-p)$ no ocurren

[52] En caso que tenga dificultades con el álgebra puede mostrar sus resultados gráficamente, aunque obviamente esto no da puntaje total.

shocks. Encuentre el valor de p y de $(1-p)$, sabiendo el consumo esperado para $C_1 = 230$.