Capítulo 12

Modelos de crecimiento: Extensiones

Sin duda, el modelo neoclásico es un instrumento muy útil para entender el crecimiento económico, pero puede ser adaptado para analizar otros temas importantes. En esta sección analizaremos algunas extensiones al modelo neoclásico básico. Se introduce el capital humano, se analizan las trampas de pobreza y después se aborda un tema crucial que ha estado muy presente en la teoría del crecimiento desde mediados de los años 80 y que son los modelos de crecimiento endógeno. En estos, en contraste con el modelo de Solow, no es necesario apelar al crecimiento exógeno de la productividad para que una economía crezca de forma permanente. Finalmente, para concluir este capítulo se presenta un modelo de crecimiento de "muy-muy" largo plazo para entender como puede el mundo haber vivido milenios de estancamiento y solo en los últimos 200 a 250 años los niveles de vida han aumentado significativamente. En estos siglos es donde podemos pensar en el modelo de Solow o los de crecimiento endógeno, pero para mirar la historia de la humanidad bajo la lupa del crecimiento hay que entender milenios de estancamiento.

12.1. El modelo de Solow ampliado: Capital humano

La fuerza de trabajo no es simplemente L, es decir, horas trabajadas. El trabajo tiene implícita cierta calidad y capacidad para ser más productivo, y esto es el **capital humano** . El conocimiento y las habilidades que adquiere la mano de obra hacen crecer el capital humano. El proceso de adquisición del conocimiento se puede hacer por la vía de sacrificar ingresos, dejando de trabajar y educándose, o se puede aprender en el mismo trabajo (learning-by-doing). Sin duda que la forma de adquisición de conocimientos dependerá del tipo de conocimientos de que se trate. En una primera etapa es posible pensar que basta con trabajar para aprender, pero a medida que los conocimientos se sofistican y especializan es necesario algún modo de educación más formal.

A continuación analizaremos dos maneras de formalizar capital humano. Ellas, aunque similares, tienen usos distintos en términos de lo que podemos aprender.

12.1.1. Sustitución perfecta capital humano-capital físico

Asumiremos, realistamente, que hay tres factores de producción: trabajo (horas), L, capital humano (conocimientos y habilidades), H, y capital físico, K. La función de producción es Cobb-Douglas con retornos constantes a escala y un parámetro A que denota productividad total de los factores

$$Y = F(L,H,K) = AL^{\lambda}H^{\beta}K^{1-\lambda-\beta}. \tag{12.1}$$

Para simplificar, consideraremos que L es constante. El supuesto crucial para simplificar el modelo es asumir que ambos tipos de capital se acumulan ahorrando ("se compran"), y la tasa de ahorro es la misma s. Asimismo, y para facilitar más el álgebra, asumiremos que ambos tipos de capital se deprecian a la misma tasa, δ. En este sentido decimos que ambos tipos de capital son perfectos sustitutos, no desde el punto de vista de la función de producción, donde la sustitución es imperfecta, sino desde el punto de vista de la acumulación. En consecuencia, expresando todo en términos per cápita, tenemos que la ecuación de acumulación corresponde a

$$\Delta k + \Delta h = sf(h,k) - \delta(h + k), \tag{12.2}$$

como debería ser evidente de esta ecuación, ambos tipos de capital son perfectos sustitutos. Así, podríamos trasladar cualquier cantidad de capital físico a capital humano en un instante. Lo que no podemos es aumentar el total de este "capital ampliado", ya que solo lo podemos hacer ahorrando y destinando parte de la producción a capital. Esta es una simplificación importante pero útil, y más adelante veremos formulaciones más realistas.

En consecuencia, la combinación óptima de ambas formas de capital será tal que la productividad marginal de ambos sea igual. De otra forma convendrá transformar capital menos productivo en el capital más productivo. Este movimiento hará que la productividad marginal del capital menos productivo suba, en la medida en que se reduce su stock, y la del más productivo se reduzca como producto de que hay más de él. Esta condición de igualdad de las productividades nos dará la razón óptima en que deben estar K y H en todo momento. Igualando las productividades marginales, tenemos

$$\beta \frac{Y}{H} = (1 - \lambda - \beta) \frac{Y}{K}. \tag{12.3}$$

Es decir, el capital humano siempre será la siguiente proporción del capital físico,

$$H = \frac{\beta}{1 - \lambda - \beta} K. \tag{12.4}$$

Definiendo $\xi \equiv \beta/(1 - \lambda - \beta)$ y escribiendo todo en términos per cápita (la función de producción tiene retornos constantes a escala) se tiene que

$$y = Ah^{\beta} k^{1-\lambda-\beta}.$$

Pero ya vimos en (12.4) que $h = \xi k$ con lo cual llegamos finalmente a

$$y = A\xi^{\beta} k^{1-\lambda}. \tag{12.5}$$

Esta es una función de producción igual (ajustando la constante) a la estudiada en el modelo del capítulo pasado, con la única diferencia de que el nivel de capital por trabajador está elevado a la participación total del capital humano y el capital físico[1].

En este contexto, es razonable suponer que cada factor tiene una participación igualitaria en el producto. Es decir, $\beta = \lambda = 1 - \beta - \lambda = 1/3$. De esta forma, cuando se mide en conjunto el capital humano con el trabajo —como debe ser, ya que se cuentan horas trabajadas, pero con el capital humano incorporado—, tendríamos una participación cercana a los dos tercios. Sin embargo, al considerar que ambas formas de capital mantienen una misma proporción, la participación del capital se eleva a cerca de $2/3$. Como veremos al analizar la evidencia en el próximo capítulo, este valor es más consistente con las velocidades de convergencia que se observan en la realidad.

Lo que ocurre en este caso es que, si bien contablemente H y L están unidos, desde el punto de vista de la mecánica del modelo neoclásico los factores reproducibles (K y H) son los relevantes en la dinámica del crecimiento. Y en este caso, los factores reproducibles tienen una participación en torno a los dos tercios.

[1] Esto es discutido con detalle en Mankiw, Romer y Weil (1992), quienes argumentan que esta es una extensión razonable al modelo de Solow para explicar los procesos de crecimiento en el mundo real.

12.1.2. Capital humano y educación

Otra forma de ver la acumulación de capital humano es considerar que la gente debe estudiar para tener más conocimiento, y el capital humano depende de la cantidad de estudios que ha tenido la fuerza de trabajo.

Consideremos la función de producción

$$Y = AH^{\alpha}K^{1-\alpha}. \tag{12.6}$$

El nivel de capital humano corresponde a

$$H = e^{\phi u}L, \tag{12.7}$$

donde u es el nivel de educación de la fuerza de trabajo L y ϕ es un número positivo que representa la eficiencia del proceso educacional, es decir, la calidad de la educación. Al término $e^{\phi u}$ lo llamaremos capital humano per cápita, y lo denotamos por h. La diferencia básica de esta forma de especificar el capital humano con la anterior es cómo se acumula, y esta parece más realista. En este caso se requiere educarse para acumular capital humano.

El modelo en este caso es exactamente el mismo que el modelo analizado en el capítulo anterior, solo con un cambio en el parámetro tecnológico, que incorpora el nivel y la calidad educacional,

$$Y = A(e^{\phi u}L)^{\alpha}K^{1-\alpha}. \tag{12.8}$$

Charles Jones ha usado extensivamente esta función de producción para explicar las diferencias de ingreso per cápita entre países[2]. De la ecuación (**??**) obtenemos la razón entre capital y trabajo en estado estacionario, la que implica que el ingreso per cápita en estado estacionario será

$$y = \left[\frac{s}{\delta + n + \frac{x}{\alpha}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} hA^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{12.9}$$

Usando esta expresión, podemos explicar por qué los países tienen distintos niveles de ingreso per cápita. Ignorando las diferencias de crecimiento de productividad, las que resultarían en distintas tasas de crecimiento y, por lo tanto, en trayectorias de ingreso divergentes[3], podemos ver que las diferencias de ingreso (asumiendo que se está en estado estacionario) se producen por:

---

[2] Ver la discusión en Jones y Vollrath (2013).

[3] Jones y Vollrath (2013) y los otros trabajos de Jones discuten más en detalle este hecho, pero como una primera aproximación es útil para explicar las diferencias de ingreso.

diferencias en la tasa de ahorro-inversión (s), diferencias en las tasas de crecimiento de la población (n), diferencias en el nivel del capital humano (h) y diferencias en la tecnología (A). El trabajo de Jones ha calibrado estas diferencias y ha demostrado que son poderosas para explicar los diferenciales de ingreso en el mundo. Por supuesto, esta es una primera aproximación, ya que deberíamos explorar más profundamente los determinantes de la inversión, la educación, la difusión de las tecnologías, y el crecimiento de la población.

Esta aproximación para medir capital humano es útil para cuando veamos modelos de crecimiento endógeno con acumulación de capital humano al final de este capítulo.

12.2. Trampas de pobreza

A partir del modelo neoclásico, aquí queremos analizar si es posible que países se queden estancados en situaciones de pobreza, es decir, que se encuentren en una "trampa" de pobreza. Pensemos en los países del continente africano; exceptuando algunos casos, la mayoría de esos países ha crecido muy poco en los últimos treinta años. ¿Por qué? Más aún, podríamos pensar que si estos países lograran superar esta condición de pobreza podrían "despegar". La idea es que puede haber equilibrios múltiples. Por un lado, si la economía es pobre se queda pobre y nada la saca de ahí. Por otro lado, si la economía es rica, podrá también quedarse en esa posición.

Una alternativa para explicar esto es suponer que la tasa de ahorro del país es baja para un nivel bajo de capital y es alta para niveles altos de capital. Es decir, un país pobre tendría bajo ahorro, lo que al mismo tiempo significa que su equilibrio será con un nivel de ingreso bajo. Por el contrario, si la economía tiene un nivel de ingreso elevado y tiene un ahorro elevado, entonces su ingreso de equilibrio será alto. Formalmente esto es

$$\begin{aligned} s &= s_1 \quad \text{para} \quad y < \hat{y}; \\ s &= s_2 \quad \text{para} \quad y \geq \hat{y}, \end{aligned} \tag{12.10}$$

donde $\hat{y} = f(\hat{k})$ es el nivel de ingreso que una vez superada la tasa de ahorro tiene un salto discreto a $s_2 > s_1$. Gráficamente esta idea se ve en la figura 12.1.

Cuando el país tiene bajo nivel de capital su tasa de ahorro es baja porque su consumo se puede encontrar cerca de su nivel de subsistencia, por lo tanto el individuo no puede ahorrar, porque tiene poco o nada que ahorrar. La fracción de su ingreso que destina al ahorro es baja. Por otra parte, cuando el nivel de capital y de ingreso es alto, su tasa de ahorro es mayor, porque ahora tiene recursos para satisfacer sus necesidades básicas, más consumo e incluso

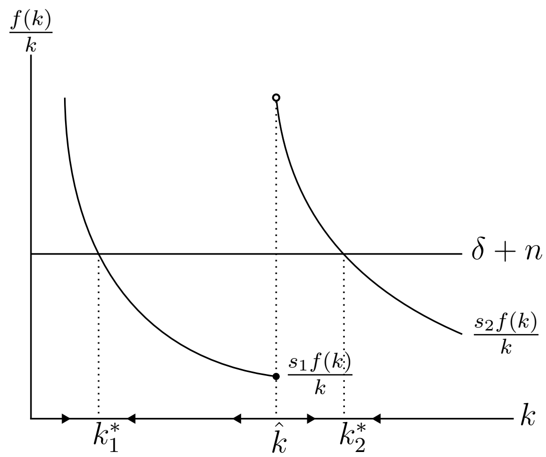

Figura 12.1: Trampa de pobreza.

ahorrar. Por lo tanto, un país que se encuentra en un estado estacionario pobre podría permanecer así por mucho tiempo.

Este tipo de explicaciones puede ayudar a racionalizar la ayuda internacional, sin embargo, el problema de este tipo de ayuda es que resulta difícil estimar cuánto capital necesita el país para pasar de un equilibrio pobre a rico, es decir, si un país recibe una cantidad insuficiente de capital puede ser que la ayuda no sirva para sacar al país de la situación de pobreza. Segundo, existe un serio problema de riesgo moral para los países con la ayuda internacional. Si la ayuda internacional se da como un flujo a países que clasifican por ser pobres, el progreso puede reducir la posibilidad de mayor ayuda. Este es un argumento similar al que se usa para criticar el estado de bienestar, a través del cual existen muchas donaciones que en la práctica no sirven al propósito de inducir a la gente a aumentar sus ingresos. Por el contrario, conviene mantenerse esforzándose poco si la ayuda es elevada. Sin embargo, debemos agregar un problema adicional, y tal vez más preocupante, de la ayuda internacional, y es la posibilidad de que la ayuda sea capturada en redes de corrupción. No es obvio cuál es la respuesta correcta, pero claramente establecer ayuda por un período acotado, atada a ciertos progresos (entre otros) y con buenos mecanismos para verificar *ex post* su uso son recetas básicas para que la ayuda tenga máxima efectividad.

Otra manera análoga de explicar trampas de pobreza es suponer que la función de producción $Ak^{1-\alpha}$ tiene dos valores de A. Para un nivel de capital bajo, el conocimiento es limitado y los efectos del capital para inducir mayor conocimiento en el resto de la economía son limitados. En cambio, cuando el capital supera cierto nivel, sus efectos sobre el resto de la economía son mayores, induciendo aumentos de productividad y por lo tanto un A mayor.

Estos modelos son simples extensiones del modelo neoclásico, pero con una interpretación muy sugerente sobre las razones por las cuales algunos países se estancan en situaciones de pobreza. Cabe entonces preguntarse cuán importantes pueden ser estas trampas de pobreza. Una calibración de este tipo de modelos ha sido usada por Kraay y Raddatz (2005) para evaluar esta hipótesis en países africanos y ellos concluyen que el modelo no es capaz de explicar sus bajos niveles de ingreso.

12.3. Crecimiento endógeno: El modelo AK

¿Es posible que las economías crezcan para siempre sin necesidad de asumir que hay un crecimiento exógeno? ¿Hay alguna fuerza endógena a la economía que puede permitir que el conocimiento y la producción se reproduzcan permanentemente? En esta sección queremos analizar las respuestas a estas interrogantes.

Antes del análisis es bueno señalar que este tema ha sido uno de los que ha tenido mayores progresos y ha involucrado mayores esfuerzos de investigación en macroeconomía desde mediados de los ochenta. Después de importantes avances a fines de los 50 y principios de los 60, el interés por la teoría del crecimiento decayó. No fue sino hasta mediados de la década de 1980, cuando hubo disponibilidad de grandes bases de datos, así como avances teóricos que permitían analizar casos de crecimiento más complejos, que la teoría del crecimiento se revitalizó. Una de las áreas de mayor avance es la teoría del crecimiento endógeno, la que intenta explicar la posibilidad de que el crecimiento se pueda sostener sin necesidad de suponer alguna fuerza externa. Su éxito es discutible, y el consenso se acerca a versiones "extendidas" del modelo de Solow, pero sin duda las investigaciones han permitido estudiar con mucho detalle uno de los fenómenos más interesantes en economía: ¿por qué algunas economías crecen mientras que otras se estancan y empobrecen? ¿Por qué hay diferenciales de ingreso tan grandes y persistentes entre las economías del mundo?

Para que exista crecimiento en el largo plazo de alguna manera tenemos que explicar o suponer que el capital efectivo (hablaremos del significado más adelante) no presenta retornos decrecientes. Al menos la productividad marginal del capital no puede caer de manera sistemática. La formalización más sencilla es asumir la función de producción[4]

$$Y = AF(K,L) = AK, \tag{12.11}$$

[4] Este modelo, con consumidores que deciden endógenamente su tasa de ahorro, fue desarrollado en Rebelo (1991).

este es conocido como el modelo "AK". Al asumir una tasa de ahorro constante s, si la población crece a una tasa n tendremos que

$$\Delta k = sAk - (\delta + n)k,$$

con lo que llegamos a la siguiente expresión para la tasa de crecimiento del producto y el capital:

$$\gamma_y = \gamma_k = sA - (\delta + n). \tag{12.12}$$

Esto se puede apreciar en la figura 12.2.

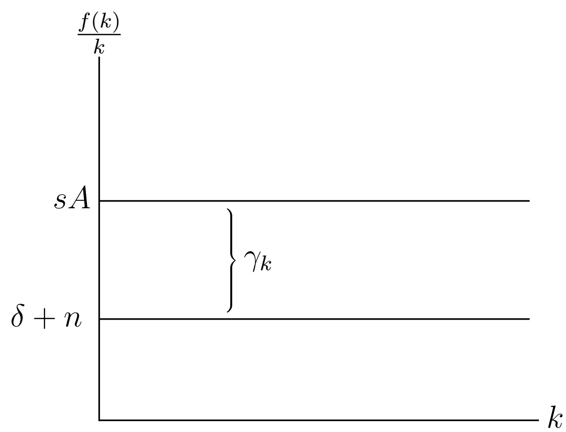

Figura 12.2: Modelo AK.

En la figura 12.2 se puede observar que este tipo de modelos predice que los países crecen para siempre y la tasa de crecimiento no depende del nivel de capital. En este tipo de modelos no existe convergencia. Las disparidades de ingreso entre los países se mantendrían para siempre.

Otra implicancia muy importante de este modelo es que un aumento en la tasa de ahorro genera mayor crecimiento para siempre, y no solo en la transición al estado estacionario como en el modelo de Solow. Aquí nunca habrá ahorro excesivo, porque este permite crecer permanentemente más rápidamente.

La función de producción Ak fue originalmente propuesta en el modelo de Harrod-Domar a fines de la década de 1930 y en la de 1940. Sin embargo, ellos suponían que la función de producción Ak era válida hasta un nivel dado de k, a partir del cual el capital tenía productividad 0. Este modelo no fue usado para explicar el crecimiento de largo plazo sino la relación crecimiento-inversión, como en el modelo del acelerador, y su interacción con el desempleo, en el contexto de la recuperación de la Gran Depresión.

Sin embargo, el problema de estos modelos es que, si incluimos el factor trabajo en la función de producción, esta presenta retornos crecientes a escala[5]. El problema de las funciones de producción con retornos crecientes a escala es que no se puede definir un equilibrio competitivo y la producción estaría dominada por una sola empresa. Para evitarlo, hay que enfrentar problemas con cierta complejidad técnica, pero que intuitivamente son más o menos sencillos. Para ello hay que reinterpretar K de manera que pueda ser consistente con una historia en la cual las empresas no tienen el problema de las economías de escala, o al incorporar el factor trabajo no introduzcamos las economías de escala. En la siguiente sección examinaremos algunas formas de obtener este tipo de linealidad, pero una forma simple de entender este tipo de tecnologías es pensar que "K" es capital ampliado, más allá de maquinarias, equipos y edificios. Para producir, las empresas no ocupan solo el capital físico sino también otras formas de capital. Por ejemplo, capital organizacional, información, etcétera.

Una extensión al modelo AK para incluir algún grado de convergencia sería postular que la función de producción es[6]

$$Y = AK + BK^{1-\alpha}L^{\alpha}. \tag{12.13}$$

La evolución del capital per cápita se puede observar en la figura 12.3. En este caso hay convergencia en el sentido que para una misma tasa de crecimiento de largo plazo, las economías más pobres crecerán más rápido, aunque nunca alcanzarán a las más avanzadas puesto que el crecimiento es permanente.

12.4. Crecimiento endógeno: Externalidades y capital humano

Como ya discutimos, lo que necesitamos para que haya crecimiento endógeno es que la productividad marginal del factor reproducible no caiga a 0 a medida que este factor crece, o simplemente que la tecnología sea de retornos constantes a este factor.

[5] Retornos constantes al capital significa que la función de producción es del tipo AK. Al agregar un nuevo factor con rendimientos decrecientes, la función de producción tendrá retornos crecientes a los factores, quedando del tipo AKL^{α}.

[6] Esta función de producción fue propuesta por Jones y Manuelli (1990).

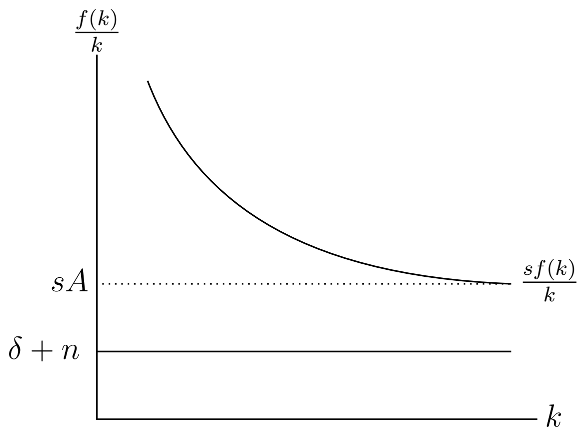

Figura 12.3: Modelo AK extendido.

Una manera de generar esta linealidad es suponer que hay externalidades al capital[7]. Si bien en las empresas habrá retornos constantes al capital y al trabajo, lo que garantiza la existencia de un equilibrio competitivo, a nivel agregado puede haber una externalidad. En este caso la función de producción sería

$$Y = AK^{1-\alpha}\bar{K}^{\alpha}L^{\alpha},$$

donde K es el capital de la empresa, pero $\bar{K}$ es alguna forma de capital agregado externo a la empresa, de manera que estas no enfrentan economías de escala, aunque a nivel agregado sí las hay. Esto puede ser una externalidad del conocimiento. A medida que haya más capital, habrá más conocimiento, del cual no se puede apropiar el inversionista sino que se disemina a través de toda la economía. En el agregado la función de producción es lineal en capital.

Otra alternativa para generar crecimiento endógeno es considerar la acumulación de capital humano. La característica clave de pensar en el trabajo como capital humano es que se puede acumular. El trabajo se reproduce a la tasa de crecimiento de la población y es, en una primera aproximación, un dato. Sin embargo la fuerza de trabajo se puede hacer más eficiente invirtiendo en capital humano. Por ejemplo, sacrificando trabajo y usando ese tiempo en estudiar se puede mejorar la calidad de la mano de obra, o sea tener más capital humano. Si denotamos el capital humano per cápita por h, la función de producción en términos per cápita sería

$$y = Ak^{1-\alpha}h^{\alpha}. \tag{12.14}$$

[7] Ver Romer (1986).

Lucas (1988) sugiere que la acumulación de capital humano se produce destinando tiempo a la educación tal como se discute en 12.1.2. La acumulación de capital humano está dada por

$$\Delta h = \phi u h - \delta_h h, \tag{12.15}$$

donde u es la fracción del tiempo que los individuos ocupan en acumular capital humano educándose, mientras $1 - u$ es la fracción de tiempo destinada a trabajar. La tasa de depreciación del capital humano es δ_h y ϕ es la eficiencia de la educación. Al usar esta especificación para el crecimiento del capital humano, muy distinta del caso en que asumimos que K y H eran perfectos sustitutos, tendremos que h crece dependiendo del tiempo dedicado a la educación y su eficiencia, y esto genera crecimiento permanente del ingreso per cápita sin necesidad de asumir que la productividad total de los factores, A, crece exógenamente.

El motor de crecimiento será el capital humano, pero para hacer un análisis más detallado del proceso de crecimiento y el efecto de las políticas debemos no solamente especificar la evolución del ahorro, tal como se hace en el modelo de Solow al asumir una tasa de ahorro constante, sino además analizar la determinación de u.

12.5. Fertilidad y crecimiento de muy largo plazo

El modelo de Solow tal y como lo conocemos es bueno para explicar la dinámica del crecimiento económico en la actualidad. Sin embargo si vemos economías preindustriales, falla en describir de buena manera el comportamiento del crecimiento en estas. Este es un modelo *Malthusiano*, llamado así en honor al destacado economista y demógrafo de fines del siglo XVIII y principio del XIX Thomas Malthus. En su famoso ensayo sobre los principios de la población él planteaba que la población no podía crecer por la incapacidad de aumentar a un ritmo adecuado la capacidad de alimentación, de ahí la población y la actividad podrían estar permanentemente estancadas, y eso fue precisamente lo que sucedía en el mundo hasta los tiempos del Malthus. La principal característica del modelo que se presenta aquí es que tiene una función de producción agrícola que utiliza la tierra, que es un factor fijo y, por otra parte, hay una relación entre fertilidad e ingresos, donde la tasa de crecimiento de la población es una función creciente del ingreso per cápita. Para entender estas relaciones y sus consecuencia, a continuación se presentará un modelo con esas características siguiendo el trabajo de Doepke (2008).

La función de producción agregada corresponde a

$$Y_t = A_t N_t^{\alpha} Z_t^{1-\alpha}, \tag{12.16}$$

donde A es la productividad, N es el tamaño de la población (que asumiremos es igual a la fuerza de trabajo) y Z es la cantidad de tierra. Este último factor es fijo, pues su dotación esta dada por la naturaleza y no se puede cambiar.

Denotando en minúscula las variables en términos per cápita, tenemos que

$$y_t = A_t z_t^{1-\alpha}, \tag{12.17}$$

por lo tanto el crecimiento per cápita del producto cumple

$$\gamma_y = \gamma_A + (1-\alpha)\gamma_z. \tag{12.18}$$

Como fue mencionado anteriormente la tierra es constante, por lo tanto $\gamma_z = \gamma_Z - \gamma_N = -\gamma_N$. Usando esta relación, se puede reescribir la ecuación (12.18) como

$$\gamma_y = \gamma_A - (1-\alpha)\gamma_N. \tag{12.19}$$

Es directo notar de (12.19) que el crecimiento del ingreso per cápita es una relación creciente con el crecimiento de la productividad y decreciente con el crecimiento de la población. Este último efecto negativo es explicado por la cualidad de fijo del factor tierra: mientras más crece la población, hay menos tierra para que cada persona pueda trabajar, lo que disminuye el ingreso per cápita.

12.5.1. Teoría del estancamiento

Asumiendo que la productividad tiene un crecimiento constante en el tiempo, $\gamma_A = \bar{\gamma}_A$, y siguiendo a Malthus en su postulado que el crecimiento de la población es una función creciente del ingreso per cápita, es decir esta determinada endógenamente por la relación $\gamma_N = \gamma_N(y_t)$, donde $\gamma_N'(y_t) > 0$. Justificaciones para esta relación es que los hijos entran a la función de los padres como bienes normales. Por lo tanto, un incremento en el ingreso, se traduce en un incremento en la demanda por hijos, y así en un incremento del crecimiento de la población. Otra visión, es que al aumentar los niveles de ingreso, mejora la nutrición, lo que reduce la mortalidad, y mejora la capacidad de mantener a los hijos, lo que nuevamente se traduce en una relación positiva entre el crecimiento del ingreso per cápita y el crecimiento de la población.

Utilizando las definiciones anteriores, la ecuación (12.19) quedaría como

$$\gamma_y = \bar{\gamma}_A - (1-\alpha)\gamma_N(y_t). \tag{12.20}$$

De acuerdo a esta relación, el crecimiento del ingreso per cápita es una función decreciente de su nivel. Tarde o temprano dado que $\bar{\gamma}_A$ es fijo y γ_N creciente, se producirá estancamiento. La economía dejará de crecer. Pero, más aún, si no hay crecimiento de la productividad, $\bar{\gamma}_A = 0$, el estancamiento se produce sin crecimiento de la población. Este modelo es notablemente exitoso para describir el proceso de crecimiento económico pre revolución industrial. Los ingresos no crecían y la población tampoco, o es más, sus tasas de crecimiento eran ínfimas para las cifras a las que estamos acostumbrados en la actualidad.

12.5.2. Teoría del despegue

Una manera de revertir el resultado anterior es suponer que la relación entre el crecimiento de la población y el producto per cápita tengan una relación negativa, es decir $\gamma_N(y_t)$ con $\gamma_N' < 0$. En la práctica es lo que podemos observar en la actualidad, ya que hubo un proceso de transición demográfica, donde se pasó de tener altas tasas de fertilidad y mortalidad en el período pre industrial, a uno donde la fertilidad, mortalidad y crecimiento de la población son bajos. Si a esto agregamos crecimiento de la productividad nunca se producirá estancamiento.

Una forma para integrar los efectos de la transición demográfica en los modelos de crecimiento, y así poder explicar la teoría del despegue, es que la baja en la fertilidad se debe al *trade off* que se produce entre "cantidad" de hijos (el número) versus "calidad" de hijos (su capital humano). Un modelo para explicar esta relación es presentado a continuación.

Suponga la siguiente función de utilidad de los padres,

$$u(c,n,h) = (1-\beta)\log(c) + \beta[\log(n) + \theta\log(h)], \tag{12.21}$$

donde c es el consumo, n el número de hijos y h el capital humano de los hijos, con $\beta > 0$ y $0 < \theta < 1$ denota que los padres se benefician con el número y el capital humano de sus hijos. Pero el *trade-off* surge de la restricción presupuestaria, y estará determinado por θ. Los padres tienen que usar una fracción a fija de su tiempo para la crianza básica de cada hijo, y además pueden elegir ocupar una fracción adicional e por hijo para aumentar su capital humano, es decir educarlos.

Si H es el capital humano de los padres y w es el salario por unidad de capital humano, su ingreso laboral será wH. No obstante, de este ingreso una fracción $(a+e)$ estará destinada a la crianza, y solo queda $[1-(a+e)n]wH$ para el consumo. En consecuencia su restricción presupuestaria es

$$c = [1-(a+e)n]wH. \tag{12.22}$$

El capital humano de los hijos, h, depende del capital humano de los padres, H, y el tiempo (los recursos) destinados a la educación, e, de acuerdo a la relación

$$h = 1 + \mu He, \tag{12.23}$$

donde μ es la productividad de la tecnología de educación. Cada hijo recibe al menos una unidad de capital humano, aún cuando $e = 0$, que representa habilidades productivas básicas, que no dependen de la educación. Finalmente, los padres también tienen una restricción de consumo, $c \geqslant \bar{c}$, donde $\bar{c}$ es el mínimo de consumo para la subsistencia.

Asumiendo, inicialmente, que el salario w y la productividad de la educación μ son lo suficientemente bajos para que la restricción de subsistencia es activa y los padres elijan cero educación ($e = 0$), el número de hijos estará limitado por la necesidad de tener un mínimo $\bar{c}$ unidades de consumo, que despejando de la restricción (12.22) para $e = 0$ se tiene que

$$n = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\bar{c}}{wH}\right). \tag{12.24}$$

En este régimen, la relación entre ingreso wH, y la fertilidad n es positiva, como es asumido en el modelo Mathusiano de estancamiento.

Ante incrementos en el salario w y en la productividad de la educación μ, la economía tendrá una transición hacia un estado donde la restricción de subsistencia ya no será activa, y el tiempo dedicado a la educación, e, será positivo lo que permitirá aumentar el capital humano. En este escenario, los padres destinarán una fracción fija de su tiempo criando a los hijos. El balance entre "cantidad" y "calidad" de los hijos depende del capital humano de los padres H. Resolviendo para las condiciones de primer orden de la utilidad de los padres sujeto a (12.22), las decisiones óptimas de número de hijos y tiempo dedicado a su educación está dada por

$$n = \frac{\beta}{a + e}, \tag{12.25}$$

$$e = \frac{1}{1 - \theta}\left(a\theta - \frac{1}{\mu H}\right). \tag{12.26}$$

La ecuación (12.25) muestra el *trade off* entre cantidad y calidad de hijos: el número de hijos es una función decreciente de la educación e. Invertir mucho en cada hijo aumenta los costos de crianza, por lo que se reduce su demanda. La educación e, depende positivamente del capital humano de los padres H. Así, un incremento en el ingreso per cápita (a través de un aumento en H), disminuirá la tasa de crecimiento de la población (fertilidad) n. Nótese, sin embargo, que un aumento en el salario w puede aumentar c, e y n a través de la relajación de la restricción presupuestaria. No así el aumento de H pues mejora las posibilidades de incremento de h de los hijos, cambiando la decisión hacia mayor e y menor n.

Con estos resultados, es posible superar la trampa Malthusiana, pero necesitamos algún mecanismo que lo genere. Un primer mecanismo es un cambio tecnológico que aumente la eficiencia de la educación. También podría ocurrir que a través del tiempo los padres vayan aumentando θ dando mayor importancia a la educación de los hijos versus el número. Un segundo mecanismo es a través de un cambio estructural, por la existencia de un sector menos intensivo en el factor fijo, la tierra, como es el caso del sector industrial. Se puede producir un flujo de trabajadores hacia el sector industrial donde la capacidad de producción no está limitada por un factor fijo. Por último, puede ocurrir un aumento de la producción que aleje a la economía del estancamiento ($\gamma_A > (1 - \alpha\gamma_N)$). Estos fueron el tipo de factores que ocurrieron durante la revolución industrial y que generaron el despegue.

Referencias

Doepke, Matthias (feb. de 2008), "Growth Take-offs". *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Ed. por Steven N. Durlauf y Lawrence E. Blume. 2nd Edition. Nature Publishing Group pp. 806-810.

Jones, Charles I. y Dietrich Vollrath (ene. de 2013), *Introduction to Economic Growth*. Third Edition. W. W. Norton & Company.

Jones, Larry E. y Rodolfo Manuelli (oct. de 1990), "A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications". *Journal of Political Economy* Vol. 98, No. 5, pp. 1008-1038.

Kraay, Aart y Claudio Raddatz (jun. de 2005), *Poverty Traps, Aid, and Growth*. Policy Research Working Paper Series 3631. The World Bank.

Lucas, Robert E. (1988), "On the Mechanics of Economic Development". *Journal of Monetary Economics* Vol. 22, No. 1, pp. 3-42.

Mankiw, Gregory, David Romer y David N. Weil (mayo de 1992), "A Contribution to the Empirics of Economic Growth". *Quarterly Journal of Economics* Vol. 107, No. 2, pp. 407-437.

Rebelo, Sergio (1991), "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth". *Journal of Political Economy* Vol. 99, No. 3, pp. 500-521.

Romer, Paul M. (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth". *Journal of Political Economy* Vol. 94, No. 5, pp. 1002-37.

Problemas

Problema 12.1. Crecimiento y terremoto.
Considere el modelo neoclásico de crecimiento (Solow), asumiendo que la tasa de ahorro es s, una tasa de depreciación δ, un crecimiento de la población de n, crecimiento de la productividad total de los factores (A) de x, y participación del trabajo igual a α. La función de producción, total, es

$$Y = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}.$$

(a) Escriba la expresión de la dinámica del crecimiento del capital por unidades de eficiencia de trabajo. Derive la expresión para el coeficiente capital producto en estado estacionario, en función de los parámetros. ¿A qué tasa crecen el producto, el capital y el consumo agregados?¿Y el producto, capital y consumo per cápita?

(b) Suponga que $s = 24\,\%$, $n = 1{,}5\,\%$, $x = 1{,}5\,\%$, $\alpha = 0{,}5$y $\delta = 3{,}5\,\%$. Calcule el coeficiente capital-producto de largo plazo y la tasa de crecimiento de largo plazo del producto total. Dado el crecimiento del producto total en el largo plazo, realice una descomposición del crecimiento en la contribución del capital, empleo y productividad total de los factores. ¿Cuál es la causa del crecimiento del producto per cápita?

(c) Suponga que ocurre un gran terremoto que destruye un $10\,\%$ del capital total. ¿Cuánto cae el PIB?¿A cuánto baja (o sube) el coeficiente capital producto?¿Cuánto será la tasa de crecimiento inmediatamente después del terremoto?

Problema 12.2. Crecimiento y acumulación de capital humano.
Considere una economía que tiene la siguiente función de producción

$$Y_t = H_t^{\alpha}K_t^{\alpha-1},$$

donde H es la cantidad de trabajo efectiva (corregida por capital humano) que se dedica a la producción de bienes. Su nivel de habilidades es h_t y de la población total (L_t) una fracción, constante, u trabaja, mientras $1-u$ se educa. Por lo tanto $H_t = uh_tL_t$.

(a) Si la población no crece, y h_t es constante. ¿ Cuál es el crecimiento de largo plazo de esta economía? (Recuerde que en estado estacionario el capital y el producto crecen a la misma tasa). Siga suponiendo que la población no crece, pero el capital humano por persona, o nivel de habilidades, crece de acuerdo a la siguiente expresión

$$\dot{h}_t = \phi(1-u)h_t - \delta h_t.$$

(b) Interprete esta ecuación y muestre a que tasa crece el nivel de habilidades. ¿A cuánto crecerá en estado estacionario el producto de esta economía? Es fácil ver que el consumo en la trayectoria de crecimiento balanceado crecerá a la misma tasa que el producto y el capital. Si la función de utilidad es de una elasticidad de sustitución constante igual a σ y con una tasa de descuento ρ, sabemos que el consumo crece de acuerdo a la la siguiente expresión

$$\gamma_C = \frac{\bar{C}}{C} = \frac{r-\rho}{\sigma},$$

donde r es la tasa de interés. También se puede demostrar que si la tasa de depreciación del capital es igual a la del capital humano, la tasa de interés de equilibrio será $\phi - \delta$.

(c) A cuanto crecerá el producto y el consumo como función de ϕ,δ,rho y σ. ¿ Qué pasa con el crecimiento de la economía cuando aumenta ϕ? Interprete el resultado.

(d) Use sus resultados en 2b) y 2c) para despejar el valor de u y $1-u$ en estado estacionario como función de los parámetros. Como caso especial considere $\sigma = 1$ (por si no lo sabe, aunque no es necesario para el problema, esta es una utilidad logarítmica) y encuentre los valores de u y $1-u$. ¿ Qué pasa con la cantidad de gente educándose cuando la eficiencia de la educación aumenta?.

(e) Suponga que repentinamente se mejora la calidad de la educación. Discuta cualitativamente, tal como se hizo en clases para el modelo de ideas e investigación y desarrollo, qué pasa con el nivel de producto y con la tasa de crecimiento a través del tiempo.

Problema 12.3. Crecimiento y educación.
Considere una economía donde la función de producción es

$$Y_t = AH_t,$$

donde A es la productividad y H el capital humano disponible, que es igual al total de tiempo trabajado multiplicado por su índice de habilidades (h_t). La gente en esta economía vive por dos períodos, de modo que en cada período hay una generación de jóvenes y otra de viejos. La población es constante, de modo que cada generación es del mismo tamaño e igual a L. Los jóvenes ocupan una fracción u de su tiempo en educarse y el resto $(1-u)$ en trabajar. Los viejos trabajan todo el tiempo. Los jóvenes en t nacen con el mismo nivel de habilidades de sus padres (h_t). Ellos pueden aumentar sus habilidades educándose. Si un joven dedica una fracción u de su tiempo a educarse, el período siguiente su nivel de habilidades (y el que tendrán sus hijos cuando jóvenes) será $h_t(1+\phi u)$. Es decir la dinámica de las habilidades esta dada por

$$h_{t+1} - h_t = \phi u h_t.$$

Donde ϕ representa la calidad de la educación.

(a) Cuánto es la cantidad de personas que trabajan, y su equivalente en capital humano (es decir cuánto es H en cada período), dado el valor de h_t, L y u. Cuánto es la producción total y la tasa de crecimiento de esta economía.

(b) Ahora determinaremos el nivel óptimo de educación. Para ello suponemos que no hay acceso al mercado financiero, de modo que para consumir habrá que trabajar, y el consumo del bien en cada período (bien que no es almacenable) será igual al ingreso laboral de dicho período. El individuo tiene una unidad de trabajo en cada período, y cuando jóvenes una fracción u ocupan en educarse y el resto en trabajar. ¿Cuánto es su ingreso cuando jóvenes (denótelo como c_1 y su nivel de habilidades como h_1) y cuándo viejos (denótelo como c_2 y escríbalo como función de h_2)?

(c) Suponga que el individuo maximiza la siguiente utilidad del consumo

$$U = log c_1 + \beta log c_2.$$

Donde el factor de descuento β es como de costumbre menor que 1. Determine el valor óptimo del tiempo dedicado a educarse, u^*, como función de los parámetros ϕ y β. Suponga que $\beta\phi$ es mayor 1. Interprete este supuesto. ¿Qué ocurre con u^* cuando β sube? ¿Y cuando la eficiencia de la educación sube? Interprete.

(d) Suponga que la eficiencia de la educación sube. ¿Qué pasa con el producto en el corto plazo?¿Qué pasa con la tasa de crecimiento y el producto de largo plazo?.

(e) Discuta que ocurriría si hubiera pleno acceso al mercado de capitales, es decir el consumo en el período uno se podría financiar con deuda (le puede ayudar escribir los consumos de cada período y la restricción intertemporal que se debiera usar para la maximización), la que se paga a con una tasa de interés r en el siguiente período.

Problema 12.4. El Modelo de Malthus.
Considere una economía con la siguiente función de producción

$$Y_t = AL_t^{\alpha} Z^{\alpha-1}.$$

Donde L es trabajo y Z la cantidad de tierra, fija por supuesto, y como de costumbre $0 < \alpha < 1$. Los habitantes de esta economía maximizan su utilidad que depende del consumo (c es consumo per-cápita) y del número de hijos (N). La función de utilidad es logarítmica

$$\log c_t + \gamma \log N_t.$$

El individuo tiene un ingreso per-cápita de y y debe asignar θ unidades de ingreso por hijo, es decir su restricción presupuestaria es

$$c_t = y_t - \theta N_t.$$

Los parámetros γ y θ son positivos.

(a) Encuentre el número óptimo de hijos como función de y_t y los parámetros del modelo. ¿ Qué pasa con el el número de hijos cuando sube el ingreso y por qué esto es coherente con la hipótesis de Malthus sobre crecimiento de la población?¿ Qué pasa con N_t cuando γ aumenta (para y_t dado), por qué?

(b) Escriba la función de producción en términos per-cápita definiendo z_t como la cantidad de tierra por trabajador. Use la expresión para el ingreso (producto) per-cápita para reemplazarlo en la expresión para el número de hijos encontrado en la parte anterior, para llegar a una expresión que dependa de Z y L_t. Suponiendo que todos los individuos trabajan, y que cada individuo tiene N_t hijos (aquí ignoramos el hecho que se requieren dos individuos para tener un hijo). Además para simplificar asumimos que los individuos viven un sólo período, de esta forma tendremos que la dinámica de la población estará dada por $L_{t+1} = N_t L_t$. Escriba la dinámica de la población como función de Z y los parámetros del modelo.

(c) Encuentre el valor de L en estado estacionario, es decir cuando $L_{t+1} = L_t$. ¿ Cómo depende la población de estado estacionario de A y Z ? ¿ Qué puede decir entonces de la relación entre población de un país, su área geográfica y productividad?

(d) Encuentre el valor del ingreso per-cápita de estado estacionario y explique cómo depende de Z y A. Provea una intuición para sus resultados.

(e) Calcule el consumo en estado estacionario y discuta como dependen el ingreso per-cápita y el consumo de γ y θ, y relacione estos resultados con el nexo entre consumo, ingreso y población.