Capítulo 11

El modelo neoclásico de crecimiento

En este capítulo veremos el modelo neoclásico de crecimiento, también conocido como el **modelo de Solow**, trabajo que se expone en **solow1956contribution**[1]. Robert Solow recibió el premio Nobel de Economía "por su contribución a la teoría del crecimiento económico". Este modelo ha sido la base de la mayoría de los desarrollos posteriores así como también de una extensa literatura empírica que descompone el crecimiento en la contribución del crecimiento de los factores y de la productividad, y que se revisa en el capítulo **??**. A la productividad se le conoce también como el residuo de Solow.

El modelo que revisamos aquí nos permitirá discutir temas como la convergencia, así como el papel del ahorro y la productividad en el crecimiento económico.

11.1. El modelo básico

En una primera versión asumiremos que no hay crecimiento de la población ni crecimiento de la productividad. A continuación agregaremos el crecimiento de la población, para pasar en la sección siguiente a incluir crecimiento de la productividad. Esto nos permitirá entender la mecánica del crecimiento y el papel que juegan distintos factores en la generación del crecimiento. Para anticipar la principal conclusión: *no hay crecimiento del PIB per cápita si no hay crecimiento de la productividad*. Esto debiera quedar claro hacia el final

[1] También se conoce como el modelo de Solow-Swan, ya que Trevor Swan, en 1956, también publicó un trabajo donde presenta un modelo en el mismo espíritu (**swan1956economic**).

de la siguiente sección.

Se supone que la capacidad productiva de un país se puede resumir en la función de producción

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t), \tag{11.1}$$

donde Y es el PIB[2], K y L son la cantidad de capital y trabajadores, respectivamente, disponibles para la producción de bienes y servicios. F es la fiunción de producción que transforma factores en bienes y servicios. El subíndice t indica el período de tiempo. A es un parámetro de productividad conocido como **productividad total de los factores**. Un aumento en A genera un aumento proporcional en Y con los factores constantes, es decir los factores son más productivos.

Supondremos que ambos factores están plenamente utilizados y que la función de producción presenta retornos decrecientes a cada factor pero retornos constantes a escala. Esto significa que a medida que aumenta la cantidad de capital cada unidad extra de capital es menos productiva que las anteriores. Por ejemplo, un kilómetro extra de camino es más productivo en un país africano, donde presumiblemente hay muy pocos caminos, que en un país como Estados Unidos. No obstante, que haya retornos constantes a escala significa que si ambos factores suben en la misma proporción, la producción también crecerá a esa misma proporción.

Denotamos por F_i la productividad marginal del factor i, es decir la derivada parcial respecto del factor i, y F_{ii} la segunda derivada parcial respecto del factor i. Formalmente se asume que $F_i(K,L) > 0$ y $F_{ii}(K,L) < 0$, donde $i = K,L$. Esto se llama rendimientos decrecientes a cada factor. Por otra parte, retornos constantes a escala significa que $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L)$. Una de las funciones que cumple con ambas condiciones es la función de producción Cobb-Douglas

$$F(K_t, L_t) = K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha}, \tag{11.2}$$

la que usaremos en muchas aplicaciones pues nos facilita la interpretación de los resultados. Esta es la función de producción más ampliamente usada y se ajusta relativamente bien, aunque obviamente tiene sus limitaciones.

En primera instancia supondremos que no hay progreso técnico, por lo que normalizamos el parámetro tecnológico A en (11.1) a 1. Posteriormente relajaremos este supuesto.

Una transformación útil para proseguir con el análisis es estudiar esta economía en términos per cápita. Denotaremos por minúsculas las variables per

[2] Puesto que la economía es cerrada, usaremos indistintamente los términos producto e ingreso.

cápita, es decir, cualquier x será X/L[3]. Esto es importante, pues esta es una variable que en el largo plazo presumimos que no debería crecer, y demostraremos que así ocurre, aunque haya crecimiento de la población. A raíz del supuesto de retornos constantes a escala podemos dividir al interior de la función (11.1) por L, lo que implicará que también tenemos que dividir por L el PIB, para llegar a que

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) \equiv f(k_t).$$

Cuando L lo consideramos población, Y/L es PIB per cápita, pero cuando es trabajo, lo que es una interpretación más rigurosa, Y/L corresponde a la productividad (media) del trabajo. A partir de esta última ecuación podemos ver que la única manera de crecer para este país es acumular más capital, y esto se logra invirtiendo. En el caso de la función Cobb-Douglas, tendremos que la función para el PIB por trabajador como función del capital por trabajador es

$$y_t = k_t^{1-\alpha}.$$

Además, supondremos que la economía es cerrada y que no hay gobierno. Primero analizaremos el caso de crecimiento sin progreso técnico y sin crecimiento de la población, luego asumiremos que la población crece, y en la sección siguiente estudiamos el progreso técnico.

11.1.1. Población constante

De la contabilidad sabemos que en una economía cerrada y sin gobierno el producto se gasta en consumo e inversión, es decir,

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{11.3}$$

Por otra parte, sabemos que el capital se acumula dependiendo de cuánto invierte el país menos lo que se deprecia el capital instalado, es decir,

$$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t, \tag{11.4}$$

donde $K_{t+1} - K_t$ lo denotaremos por ΔK_t[4].

[3] En realidad esto es X por trabajador y no per cápita. Sin embargo, al no analizar las decisiones de oferta de trabajo ni incluir factores demográficos, esta diferencia no es importante en la discusión. Aquí se usará indistintamente per cápita y por trabajador, bajo el supuesto que población y fuerza de trabajo son lo mismo.

[4] Esta es la representación en tiempo discreto. En tiempo continuo, haciendo infinitesimalmente pequeña la unidad de tiempo y eliminando el índice de tiempo (pues todas las variables corresponden al instante t) se tiene que $\dot{k} = i - \delta k$, donde $\dot{k}$ es, formalmente, el cambio en k ante un cambio marginal en t, es decir, $\frac{dk}{dt}$.

Finalmente supondremos que los individuos ahorran una fracción s, constante, de su ingreso y, por lo tanto, consumen una fracción $(1-s)$ de él. Con esto, tenemos que

$$C_t = (1 - s_t)Y_t. \tag{11.5}$$

En el fondo, toda la conducta de los hogares se resume en s, sin entrar a discutir cómo la gente decide su ahorro y consumo. En capítulos anteriores argumentamos que esta decisión es mucho más compleja y depende del objetivo de maximizar utilidad de los hogares durante su ciclo de vida. La simplificación que aquí hacemos es similar a la función de consumo keynesiana, que resume toda la conducta en la propensión marginal a consumir (1 menos la propensión a ahorrar). Existen modelos más generales y rigurosos que parten de una conducta del consumidor más compleja, que es presentada en el capítulo **??**, pero lo poderoso del modelo de Solow es que es una formulación muy sencilla que captura los elementos del proceso de crecimiento.

Las ecuaciones (11.3), (11.4) y (11.5) pueden expresarse en términos per cápita dividiéndolas por L_t. En el caso en que no hay crecimiento de la población hacerlo es trivial, ya que la población en t y $t+1$ es la misma, y entrega las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + i_t \\ k_{t+1} - k_t = \Delta k_t &= i_t - \delta k_t \\ c_t &= (1-s)y_t. \end{aligned}$$

Combinando estas ecuaciones para expresar Δk_t en términos de ahorro y producción, notando que la producción es $y = f(k)$ y abusando de la notación para dejar de escribir los subíndices de tiempo (porque todos son t), se tiene la siguiente expresión que solo depende del capital a pricnipios de t (k_t) y a fines de t (k_{t+1}) y por lo tanto representa la acumulación de capital en el modelo de Solow,

$$\Delta k = sf(k) - \delta k, \tag{11.6}$$

Esta ecuación que encuentra graficada en la figura 11.1[5].

Como la función de producción presenta retornos decrecientes con respecto al capital, cada unidad extra de k aumenta el valor de $f(k)$ en una menor cantidad. La diferencia entre $sf(k)$ y δk es lo que se acumula de capital en términos per cápita. En k^* la inversión en nuevo capital $sf(k^*)$ es igual a la depreciación del capital δk^*, por lo tanto en este punto el capital deja de

[5] La figura es algo distorsionada por cuanto en la realidad s debiera estar cerca de 0,2, entonces la curva $sf(k)$ debiera estar muy debajo de $f(k)$, y en la figura pareciera que s es más cercano a uno. Esto es solo para mejorar la presentación gráfica, aunque es útil tener en mente que s es bastante menor que lo que se derivaría de la figura.

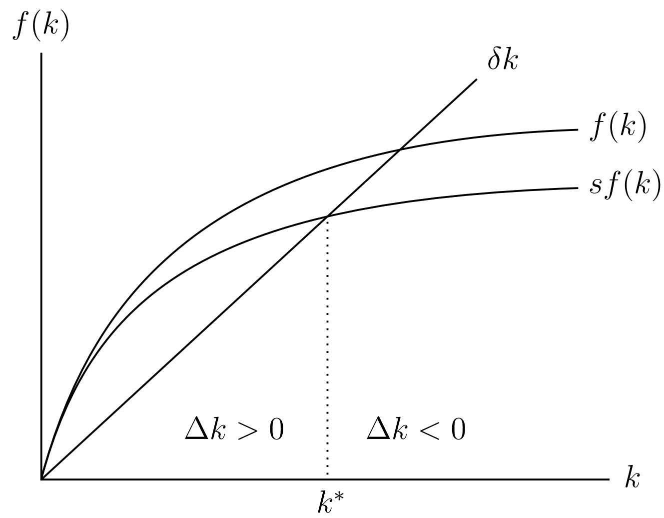

Figura 11.1: Modelo de Solow.

acumularse, es decir, $\Delta k = 0$. Esto se conoce como el **estado estacionario**. A la izquierda de k^* el capital crece a través del tiempo ($\Delta k > 0$) pues cada unidad adicional de capital, el ahorro, no solo cubre la depreciación sino que además permite agregar capital al stock existente. Por otro lado, a la derecha de k^* el capital se desacumula, pues en este caso la depreciación del capital es mayor a lo que se ahorra ($\Delta k < 0$), provocando una caída en el stock.

Conclusión 1. *No hay crecimiento del PIB en el largo plazo si no hay crecimiento de la productividad ni de la población.*[6]

Para esta conclusión es clave que la productividad marginal del capital sea decreciente, así las unidades adicionales de capital son cada vez menos productivas, previniendo que la acumulación de capital continúe indefinidamente. Imponiendo el estado estacionario en la ecuación (11.6), se obtiene que

$$\frac{k^*}{y^*} = \frac{k^*}{f(k^*)} = \frac{s}{\delta}.$$

Si la función de producción es Cobb-Douglas ($y = k^{1-\alpha}$), de la última ecuación se desprende que

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

[6] Note que en este caso el PIB total es igual, más bien proporcional, al PIB per cápita, por eso ninguno de los dos crece si no hay crecimiento de la población ni la productividad.

Esta última relación nos indica que países que ahorran más tienen mayores niveles de capital de estado estacionario. Por lo tanto también tiene mayor nivel de ingreso per cápita.[7] Volveremos sobre este punto más adelante.

11.1.2. Crecimiento de la población

A continuación relajaremos el supuesto de que la población no crece y supondremos que la población crece a una tasa constante igual a n. Entonces

$$L_{t+1} = L_t(1+n)$$

La ecuación (11.6) está en términos per cápita, pero ahora hay que tener cuidado y partir de la igualdad expresada en términos agregados

$$K_{t+1} - K_t = sF(K_t,L_t) - \delta K_t. \tag{11.7}$$

Podríamos dividir a ambos lados por L_t y el lado derecho será igual al de la ecuación (11.6), pero el lado izquierdo, $(K_{t+1}-K_t)/L_t$ no será igual a $k_{t+1}-k_t$ ya que la población no es la misma en ambos períodos. Para llegar a una expresión que nos permita resolver el estado estacionario resulta conveniente dividir (11.7) por K_t, con lo que tenemos

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{K_{t+1}-K_t}{K_t} = s\frac{F(K_t,L_t)}{K_t} - \delta = s\frac{f(k_t)}{k_t} - \delta, \tag{11.8}$$

donde la última igualdad viene de que al dividir el numerador y denominador de $sF(K_t,L_t)/K_t$ por L_t nos quedan las expresiones per cápita ya que la función de producción es de retornos constantes a escala. Ahora bien, dado que $K = k \times L$ y nosotros sabemos que, aproximadamente, la tasa de crecimiento del producto de dos variables X y Z es igual a la suma de las tasas de crecimiento de X y Z, tenemos que

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{\Delta k_t}{k_t} + \frac{\Delta L_t}{L_t} = \frac{\Delta k_t}{k_t} + n, \tag{11.9}$$

lo que remplazado en (11.9), y después de eliminar los índices de tiempo t, nos lleva a[8]

$$\Delta k = sf(k) - (\delta+n)k. \tag{11.10}$$

[7] El lector puede verificar que $y^* = (s/\delta)^{(1-\alpha)/\alpha}$.

[8] Es importante notar que (11.8) es solo una aproximación para valores pequeños de las tasas de creciento y dice que la tasa de crecimiento del capital es igual a la tasa de crecimiento del capital per cápita más la tasa de crecimiento de la población. Sin embargo, en rigor, podemos dividir (11.7) por L_t y usando que $\frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \times \frac{L_{t+1}}{L_t} = k_{t+1}(1+n)$

Si comparamos la ecuación (11.10) con (11.6) se puede concluir que son iguales, con la única diferencia de que en la ecuación (11.10) la tasa de depreciación efectiva es $\delta + n$, que corresponde a la depreciación del capital por trabajador. El capital se deprecia a una tasa δ, pero su nivel por unidad de trabajador cae a una tasa n por el hecho de que la población crece. En consecuencia, el capital *per cápita* se deprecia a $\delta + n$. Si la depreciación δ fuera 0 y no hubiera inversión, el capital per cápita caería a una tasa n. La ecuación (11.10) se representa en la figura 11.2.

Ahora tenemos una representación igual a la de sin crecimiento de la población donde la depreciación efectiva es $\delta + n$.

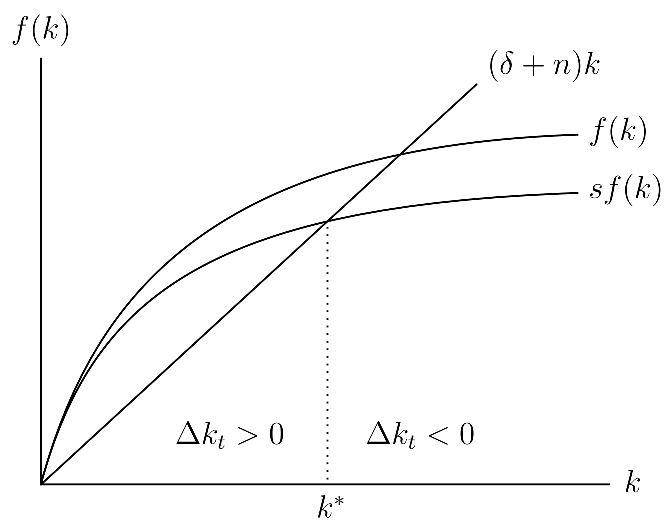

Figura 11.2: Modelo de Solow con crecimiento de la población.

Al igual que en el caso sin crecimiento de la población, si imponemos el

y restando nk_t a ambos lados, podemos llegar a que $k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}[sf(k) - (\delta + n)k_t]$. Note que esta expresión es casi idéntica a (11.10), salvo por el factor $1/(1+n)$ antes del paréntesis cuadrado. Este factor se aproxima a 1, ya que si un número pequeño, como en la práctica lo es, la aproximación es razonable. Por ejemplo si la población crece a 2 %, el factor es igual a 0.98, casi 1. Esta aproximación no es necesaria si trabajamos en tiempo continuo, como se hacía en la primera edición de este libro, pues en cada instante de tiempo el crecimiento de la población es ínfimo. Las matemáticas, sin embargo, son más complejas en tiempo continuo, y es más útil trabajar en tiempo discreto pues es como observamos los datos, mensuales, trimestrales o anuales.

estado estacionario en la ecuación (11.10) tendremos que

$$k^* = \frac{sf(k^*)}{\delta + n}$$

de donde se ontiene la siguiente expresión para la razón capital-producto:

$$\frac{k^*}{y^*} = \frac{s}{\delta + n}. \tag{11.11}$$

Para resolver explícitamente para k, podemos usar la función Cobb-Douglas y llegamos a

$$k^* = \left[\frac{s}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{11.12}$$

lo que se puede usar para encontrar el valor del PIB per cápita en estado estacionario.

Nótese que la ecuación (11.11) ya nos permite hacer algunas calibraciones. Si la tasa de ahorro es 20 %, la tasa de depreciación 3 % y el crecimiento de la población es 2 %, tendremos que el capital es cuatro veces el producto. Si, en cambio, el ahorro es 15 % del PIB, el coeficiente capital-producto sería de 3. Estas cifras, como veremos más adelante, son algo menores en la realidad; para tener una calibración más realista hay que agregar el crecimiento de la productividad.

Existe una forma alternativa de entender gráficamente la dinámica y el estado estacionario de la acumulación de capital[9]. Si dividimos la ecuación (11.10) por k_t se llega a

$$\gamma_k = \frac{\Delta k_t}{k_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t} - (\delta + n), \tag{11.13}$$

donde γ_k es la tasa de crecimiento del capital per cápita[10]. En la figura 11.3 se grafica $sf(k)/k$ y $(\delta + n)$. El estado estacionario corresponde a la intersección de ambas curvas.

Esta figura no es más que el diagrama clásico de Solow dividido por k, pero tiene la ventaja de que la distancia entre la curva $sf(k)/k$ y la horizontal $\delta + n$ nos da inmediatamente la tasa de crecimiento del capital (γ_k). Además, como no hay crecimiento de la productividad, el PIB per cápita crece proporcionalmente al crecimiento del capital per cápita, ya que $y = k^{1-\alpha}$, entonces $\gamma_y = (1-\alpha)\gamma_k$, donde γ_y es el crecimiento del PIB per cápita. En consecuencia, la distancia γ_k es proporcional al crecimiento del PIB per cápita, γ_y.

[9] Esta representación gráfica es ampliamente usada en **apuntes2000** y, a pesar de no ser la más tradicional, es la más informativa.

[10] En general, se usa la notación γ_z como la tasa de crecimiento de z.

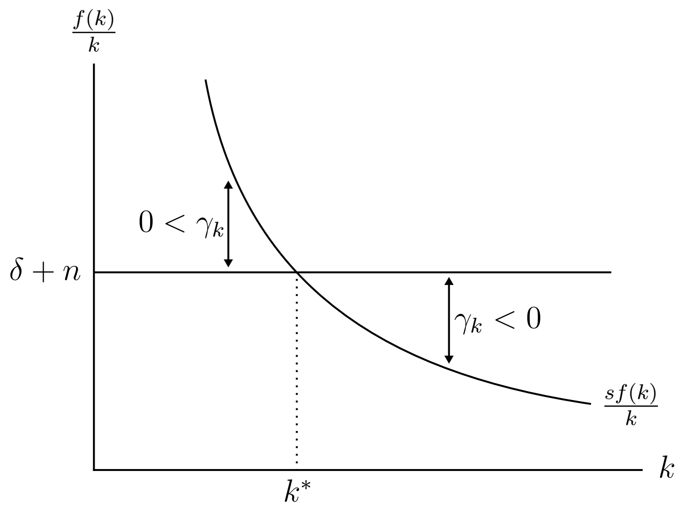

Figura 11.3: Tasa de crecimiento del capital.

La figura 11.3 nos confirma nuestra conclusión 1, es decir, en ausencia de crecimiento de la productividad los países no crecen en términos per cápita en el largo plazo, solo crecen en la transición al estado estacionario. De hecho, el capital per cápita no crece en estado estacionario, el PIB per cápita tampoco. El PIB y el capital total crecen a una tasa n.

Si la economía está a la izquierda de k^* su PIB per cápita crece, en cambio si están a la derecha el crecimiento es negativo. Por otra parte, podemos confirmar lo que nos mostraba la evidencia empírica para países "similares":

Conclusión 2. *Los países más pobres respecto de su estado estacionario crecen más rápido que aquellos que tienen un ingreso más cerca de su estado estacionario.*

En la figura esto significa que los países que están más a la izquierda de k^* crecen más rápidamente ($sf(k)/k - (\delta + n)$ es mayor). Esto se conoce como **convergencia**. Entendemos por países más pobres a países que tienen un menor nivel de capital. Este resultado proviene del hecho de que una unidad extra de capital es más productiva en países como Nepal que en países como Japón, por lo tanto con la misma tasa de inversión y depreciación Nepal va a crecer más rápido que Japón simplemente porque el capital es más productivo en Nepal.

Se debe notar que este concepto de convergencia presume que los países tienen el mismo estado estacionario y por lo tanto convergen al mismo nivel de ingreso per cápita. Esta se conoce como **convergencia no condicional**, ya que los países más ricos (pobres) crecerían más lento (rápido).

Sin embargo, uno se puede preguntar qué pasa con países que tienen distintos niveles de ingreso de largo plazo, como los ilustrados en la figura 11.4. El país que tiene equilibrio k_1^*, el pobre, está más cerca de su equilibrio si parte de k_1, que el país más rico, que partiendo de k_2 debe converger a k_2^*. En este caso el país más pobre crece más lento porque está más cerca de su nivel de ingreso de largo plazo. En este caso hay convergencia, pero **convergencia condicional** al estado estacionario, esto es, países más ricos (pobres) *respecto de su estado estacionario* crecen más lentamente (rápidamente). El país 2 de la figura es más pobre que 1 *respecto de su estado estacionario*, ya que obviamente 1 es más pobre que 2 en términos absolutos.

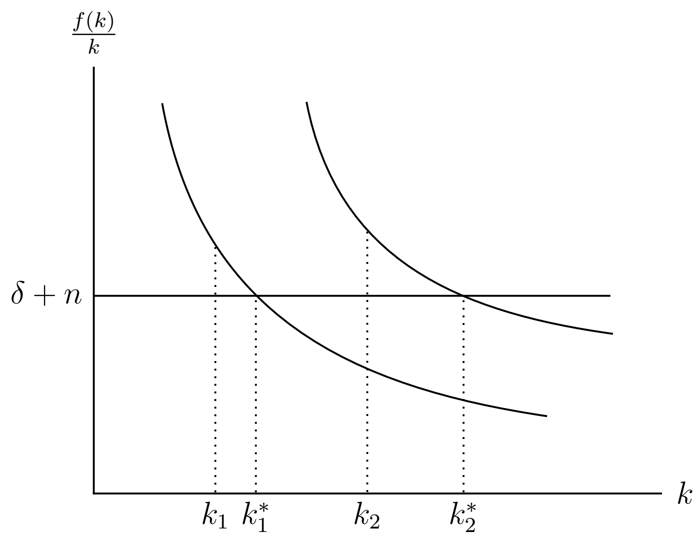

Figura 11.4: Convergencia condicional.

A partir de la figura 11.3 uno podría intentar entender qué factores influyen en que difiera el nivel de k^* entre los países. La respuesta a esta interrogante proviene de la misma figura 11.3:

- Países que ahorran más tienen mayor nivel de capital per cápita de estado estacionario.
- Países que tienen mayores tasas de crecimiento de la población tienen menor nivel de capital per cápita de estado estacionario[11].

[11] Sin embargo, existe también una relación en el sentido inverso en que países con mayor nivel de capital per cápita tienen menores tasas de crecimiento de la población, pues su

- Nosotros normalizamos el parámetro de productividad A a 1. No obstante si aceptamos que es constante, pero distinto entre países, podríamos concluir también que países con mayor productividad (A) tendrán mayores niveles de ingreso per cápita en estado estacionario.

Recordemos que en el caso en que hay crecimiento de la población y la función de producción es Cobb-Douglas se tiene que el nivel de capital per cápita viene dado por la ecuación (11.12), de donde se observa además que el capital (e ingreso) de largo plazo será menor para países con un capital que se deprecia más rápido. Sin embargo, no hay razones ni evidencia poderosa para argumentar que el crecimiento difiere porque las tasas de depreciación son diferentes. Un aumento de la tasa de crecimiento de la población o de la depreciación frena el crecimiento, porque el esfuerzo de inversión para mantener el capital per cápita constante deberá ser mayor y, por lo tanto, el capital de equilibrio deberá ser menor (la productividad es decreciente).

Si quisiéramos examinar la existencia de convergencia condicional deberíamos no solo comparar el crecimiento con el nivel de ingreso, sino además por su ingreso de estado estacionario, o los factores que determinan dicho ingreso. Podríamos ver, por ejemplo, que una economía de alto ingreso crece mucho más rápido que una de bajo ingreso, pero esto se podría explicar en el contexto del modelo de Solow, por ejemplo, porque la economía más rica tiene una tasa de ahorro muy alta.

11.2. La regla dorada

Que una economía tenga en estado estacionario un nivel de ingreso mayor no significa necesariamente que su nivel de bienestar sea mayor. Podríamos pensar que una economía que crece siempre más rápido que otra, tarde o temprano terminará teniendo mayores niveles de ingreso o consumo. No obstante, en el estado estacionario, donde no se crece más, no es claro que tener un nivel de ingreso mayor es mejor, porque esto se puede deber a que se sacrifica mucho consumo, y sabemos que una mejor aproximación al bienestar no es el nivel de ingreso, sino el de consumo. A partir de esto nos interesaría determinar cuánto es el k de estado estacionario óptimo, de tal manera que el individuo maximice su consumo. Para ese k óptimo podemos entonces determinar cuál es la tasa de ahorro óptima que sustenta dicho equilibrio de largo plazo. Este

costo de oportunidad de tener hijos es mayor. en este caso n es endógeno pues depende del nivel de ingreso, mientras aquí se supone exógeno y constante. Eso lo estudiaremos en el próximo capítulo es un análisis en estado estacionario. Es decir, queremos encontrar k^{RD}, RD por regla dorada, de tal manera que resuelva[12]

$$\max_{\{k^*\}} c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*.$$

Es decir, de todos los estados estacionarios posibles buscaremos aquel que resulte en un mayor consumo.

Derivando e igualando a 0 tenemos que la solución a este problema es

$$f'(k^{RD}) = \delta + n, \tag{11.14}$$

donde k^{RD} se conoce como el capital de la **regla dorada**.

Podemos avanzar con el álgebra suponiendo que la función de producción es Cobb-Douglas, en cuyo caso al aplicar (11.14) tenemos que la regla dorada viene dada por

$$k^{RD} = \left[\frac{1-\alpha}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Por otra parte, la ecuación (11.12) nos muestra que el capital de estado estacionario es

$$k^* = \left[\frac{s}{\delta + n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

A partir de estos dos niveles de capital podemos llegar a concluir lo siguiente respecto de si el ahorro es insuficiente o excesivo para maximizar el consumo de estado estacionario:

- Si $s = 1 - \alpha$ entonces la economía se encuentra en su nivel de regla dorada. Es decir $s = s^{RD}$.
- Si $s > 1 - \alpha$ el nivel de capital de estado estacionario es demasiado alto, y por lo tanto su tasa de ahorro es demasiado alta.
- Si $s < 1 - \alpha$ el nivel de capital es menor que el que maximiza el consumo en estado estacionario. Es decir su tasa de ahorro es muy baja.

Este análisis se puede apreciar gráficamente en la figura 11.5. Esta misma figura nos muestra que la tasa de ahorro que maximiza el consumo en el estado estacionario es s^{RD}.

En la figura 11.5 el capital de estado estacionario k^*, dado por la tasa de ahorro s, es mayor que el de la regla dorada. En otras palabras, esta economía

[12] Esta relación viene de aplicar el estado estacionario en la ecuación $\Delta k = f(k) - c - (\delta + n)k$.

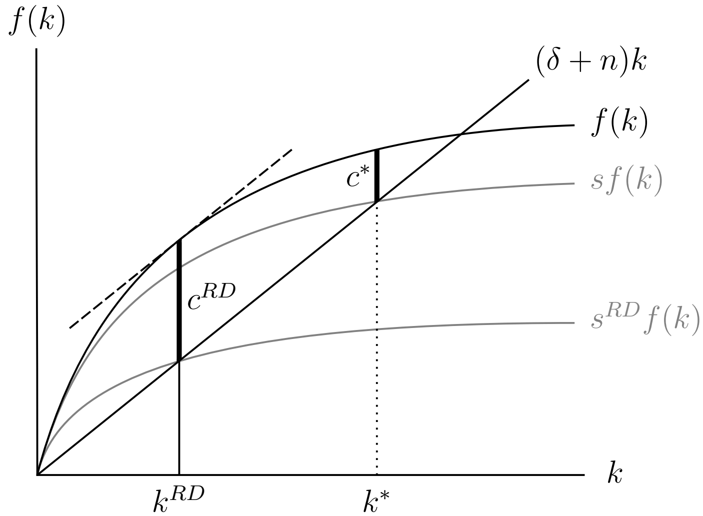

Figura 11.5: Regla dorada.

ahorra mucho. El consumo está dado por la distancia vertical entre $f(k)$ y $(\delta+n)k$ al nivel de k^*. Lo que la figura muestra es que en k^{RD} dicha distancia es mayor, es decir, se puede sostener un nivel de consumo mayor en equilibrio con una tasa de ahorro menor. Más aún, imaginemos que partimos de k^*; se podría hacer una gran fiesta, consumir $k^* - k^{RD}$, quedarnos con una tasa de ahorro menor, y ser más felices en el nuevo estado estacionario. Por ello, en teoría del crecimiento, cuando el capital es mayor que el de la regla dorada, se habla de un equilibrio *dinámicamente ineficiente*. Hay una acción, en este caso consumirse $k^* - k^{RD}$, en la cual sin ningún esfuerzo el consumo termina siendo mayor.

¿Cómo pueden las economías ahorrar en exceso? La razón nuevamente es la productividad marginal decreciente. Ahorrar mucho nos puede conducir a un nivel de capital muy elevado, en el cual la productividad es muy baja. Esto significa que $f(k)/k$ es muy bajo, y solo logra igualar la depreciación efectiva con una tasa de ahorro muy alta. Sería posible alcanzar con una menor tasa de ahorro un capital más productivo, lo que conduciría a un mayor nivel de consumo, para que en equilibrio lo que se invierta alcance también a reponer lo que se deprecia.

Aunque aquí no profundizaremos en este tema, una pregunta importante es cómo una economía descentralizada y de mercado puede ser ineficiente si, como nos dice la teoría microeconómica de equilibrio general, el equilibrio debería ser Pareto óptimo. La literatura en esta área es abundante, pero como anticipo se puede señalar que el equilibrio puede ser ineficiente cuando los mercados no son completos. Por ejemplo, en un mundo donde la gente no vive para siempre, podría no existir un mecanismo que asegure que las decisiones de las personas sean consistentes con un equilibrio dinámico eficiente de largo plazo. El problema del modelo neoclásico para analizar con mayor profundidad este tema es que asume que la tasa de ahorro es constante y exógena al modelo. En el capítulo **??** se analiza en detalle un modelo con la tasa de ahorro endógena.

Lo que sí nos permite entender este ejemplo es que existe la posibilidad que los países ahorren mucho. El ahorro de la regla dorada es igual a la participación del capital, $1-\alpha$, la que se ubica entre 0,25 y 0,4. Tomado el valor medio, países con tasas de ahorro muy altas, sobre 30 % podrían ser dinámicamente ineficientes. Este análisis nos alerta que pretender forzar el ahorro excesivamente puede ser perjudicial. En países desarrollados con elevadas tasas de ahorro, como el caso clásico de Japón, la pregunta acerca de si el ahorro es excesivo puede ser relevante. Sin embargo, para países en desarrollo esta pregunta no es tan relevante, pues si hay algo claro es que tienen poco capital, por lo tanto difícilmente estarán con exceso de capital. Además, como veremos más adelante, es posible que mayores tasas de ahorro generen de manera permanente mayores tasas de crecimiento de la economía, en cuyo caso sería más difícil pensar que puede haber ahorro excesivo.

11.3. Progreso técnico

Una de las principales conclusiones de la sección anterior fue que en el largo plazo la economía no crece en términos per cápita. Este resultado es bastante distinto de la evidencia internacional, donde observamos que los países crecen siempre más allá del crecimiento de su población. Para hacer compatible esta observación con el modelo neoclásico es necesario incorporar crecimiento tecnológico.

Para incorporar al modelo neoclásico el avance tecnológico suponemos que la función de producción es

$$Y = AF(K,L), \tag{11.15}$$

donde A es la productividad total de los factores, la cual suponemos crece a una tasa exógena x, es decir,

$$A_{t+1} = A_t(1+x).$$

El suponer que la productividad total de los factores crece exógenamente implica que solo analizaremos cuáles son las consecuencias que este avance tecnológico tiene sobre el crecimiento económico; no intentaremos analizar por qué en algunos países el progreso técnico es mayor que en otros. Seguiremos suponiendo que la población crece a una tasa n.

Si la función de producción es Cobb-Douglas, entonces la ecuación (11.15) se puede escribir como

$$Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} = K_t^{1-\alpha}\left(A_t^{1/\alpha} L_t\right)^{\alpha} = K_t^{1-\alpha} E_t^{\alpha} \tag{11.16}$$

donde $E_t \equiv A_t^{1/\alpha} L_t$. El término E se conoce como las **unidades de eficiencia de trabajo**. Esto corresponde a las horas de trabajo disponible (o número de personas) corregidos por la calidad de esta fuerza de trabajo. Esto se puede deber, por ejemplo, a los mayores niveles de educación, así como a los nuevos conocimientos, incorporados en el trabajo. Se puede notar que la ecuación (11.16) es básicamente la misma que la ecuación del modelo de Solow con crecimiento de la población. En este caso hay dos factores de producción y retornos constantes a escala. El factor K se acumula con inversión y E crece exógenamente a una tasa $n + x/\alpha$. En consecuencia parecería natural trabajar con variables medidas en términos de unidad de eficiencia, en vez de medidas en términos per cápita como lo hicimos antes, y el modelo es análogo. Obviamente se podrá intuir que como cuando solo crece la población el PIB lo hace a n, cuando crece E el PIB crecerá a $n + x/\alpha$. Eso es lo que estudiamos en esta sección.

Definimos cualquier variable $\tilde{z}$ como $\tilde{z} = Z/E$, es decir, $\tilde{z}$ corresponde a Z por unidad de eficiencia. La relación entre la variable medida por unidad de eficiencia y per cápita es simplemente $\tilde{z} = z/A^{1/\alpha}$.

Usamos el mismo punto de partida que es (11.7), pero ahora tenemos que $K = \tilde{k} \times E$ y E crece a $n+x/\alpha$, y por lo tanto se tiene la siguiente aproximación:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta \tilde{k}}{\tilde{k}} + \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \tilde{k}}{\tilde{k}} + \frac{x}{\alpha} + n.$$

La ecuación (11.8) la podemos escribir como

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = s\frac{F(K_t, L_t)}{K_t} - \delta = s\frac{f(\tilde{k}_t)}{\tilde{k}_t} - \delta,$$

donde podemos notar que $f(k)/k = f(\tilde{k})/\tilde{k}$, ya que podemos dividir numerador y denominador de $F(K,L)/K$ por L o por E. Luego, combinando estas dos ecuaciones llegamos a la siguiente ecuación que describe la evolución del capital por unidad de eficiencia:

$$\Delta \tilde{k} = sf(\tilde{k}) - \left(\delta + n + \frac{x}{\alpha}\right)\tilde{k}. \tag{11.17}$$

Esta ecuación es igual a la del modelo de Solow con crecimiento de la población pero sin progreso técnico, salvo dos diferencias. La primera es que está en términos de $\tilde{k}$ en vez de k. El estado estacionario está definido para $\tilde{k}$, en consecuencia las variables totales crecerán a lo mismo que crece E, esto en $n + x/\alpha$. La segunda es que la depreciación "equivalente" es $\delta + n + x/\alpha$, y esto es natural pues el numerador de $\tilde{k}$ se deprecia a δ y el denominador crece a $n + x\alpha$.

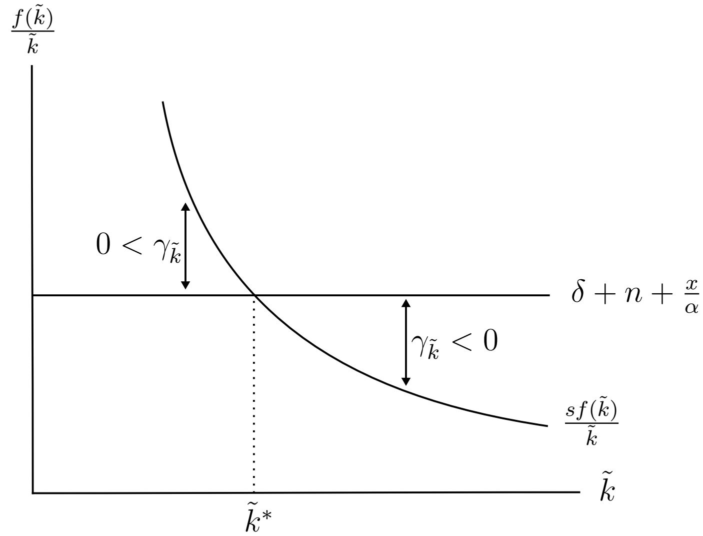

Figura 11.6: Progreso técnico.

El equilibrio se puede ver en la figura 11.6. En el estado estacionario, el producto (Y), consumo (C) y capital (K), crecen a una tasa $n+x/\alpha$, mientras que los valores per cápita (y, c y k) crecen a una tasa x/α.

Conclusión 3. *En el largo plazo el progreso técnico hace crecer el producto per cápita de los países. El crecimiento del producto total es la suma del crecimiento de la población más el crecimiento de la productividad del trabajo.*

Dado que las variables medidas en términos de unidades de eficiencia no crecen en estado estacionario, las variables agregadas deberán crecer a la misma tasa que la unidad de eficiencia (crecimiento del numerador igual al del denominador), con lo que tenemos que

$$\gamma = \gamma_Y = \gamma_K = \gamma_C = n + \frac{x}{\alpha}.$$

Para llegar a las variables per cápita, basta con restar n para tener que

$$\gamma_y = \gamma_k = \gamma_c = \frac{x}{\alpha}.$$

De la ecuación (11.17) podemos encontrar el valor del coeficiente capital-producto en estado estacionario, el cual es

$$\frac{\tilde{k}}{\tilde{y}} = \frac{K}{Y} = \frac{s}{\delta + \gamma} = \frac{s}{\delta + n + \frac{x}{\alpha}}. \tag{11.18}$$

Ahora podemos calibrar esta ecuación. Si usamos una tasa de ahorro de 15 a 20 %, tasas de crecimiento de 4 a 5 % ($n + x/\alpha$) y depreciación de 3 %, llegamos a que el capital es entre dos y tres veces el nivel de producto. Esto es más o menos lo que indica la evidencia empírica y permitiría concluir que en el largo plazo los países se ubican en torno a su equilibrio.

Al igual que en el caso de crecimiento sin progreso técnico, podemos calcular el nivel del capital que maximiza el consumo en estado estacionario, el cual es[13]

$$f'(\tilde{k}^{RD}) = \delta + n + \frac{x}{\alpha}.$$

Esta ecuación tiene otra implicancia interesante, y es que *la tasa de interés real de la regla dorada, que en el capítulo 4 vimos que era $f'(k) - \delta$, es igual a la tasa de crecimiento de la economía*, es decir si la economía está en la regla dorada, r tiene que igualar a γ. Si la tasa es menor, quiere decir que la productividad del capital es baja, en consecuencia hay mucho capital. De manera que, para que no haya mucho capital, la tasa de interés debería ser al menos igual a la tasa de crecimiento. Este es un resultado interesante y también podríamos usarlo para pensar en la realidad.

La tasa de interés de largo plazo está asociado al crecimiento de largo plazo. Antes de la crisis financiera global en países desarrollados era posible pensar en tasas reales de largo plazo en torno a 3 %. Países emergentes con tasas de crecimiento mayores podrían haber tenido tasas de interés real de largo plazo cercano a 5 %. Sin embargo, hoy en día se presume que el crecimiento por los próximos años al menos será lento y consecuentemente las tasas de interés de equilibrio serán más bajas. Esto es además consistente con un mundo con mucho ahorro, producto del poco gasto como resultado del alto endeudamiento de gobiernos, altas tasas de ahorro como resultado del envejecimiento de la población, y bajas tasas de inversión si hay pocas perspectivas de crecimiento. Mucho ahorro y poca inversión es una tasa de equilibrio baja.

Por último, se debe recordar que, para que las restricciones presupuestarias estén acotadas, es necesario que el crecimiento del ingreso sea menor a

[13] Desde el punto de vista de bienestar lo que importa es c y no $\tilde{c}$, pero como en estado estacionario $c_t^* = \tilde{c}(1 + x/\alpha)^t$ para maximizar consumo de estado estacionario se debe maximizar c^**, de donde se deriva la regla dorada igual como lo vimos en el caso de crecimiento de la población.

la tasa de interés, de otro modo uno se podría endeudar infinitamente y ser siempre solvente[14]. Por lo tanto la eficiencia dinámica es consistente con las restricciones impuestas a la tasa de interés provenientes de las restricciones presupuestarias de gobiernos y hogares para tener modelos macroeconómicos bien especificados. Hubiera sido una complicación que la condición de eficiencia encontrada aquí fuera la opuesta a la derivada de las restricciones presupuestarias.

11.4. Aplicaciones

A continuación realizaremos algunos ejercicios de estática comparativa. Analizaremos cuatro casos: reducción del stock de capital, aumento de la tasa de crecimiento de la población, aumento de la tasa de ahorro y aumento de la tasa de crecimiento de la productividad total de los factores.

(A) Reducción del stock de capital

Considere una economía que está creciendo, ya sea en la transición hacia su estado estacionario, o simplemente está en él. Como producto de un terremoto, una guerra o algún otro desastre, su stock de capital se reduce exógenamente. En términos de la figura 11.3 lo que ocurre es que el capital inicial se desplaza a la izquierda, cualquiera sea su nivel inicial.

La reducción en el capital aumenta su productividad marginal, en consecuencia una misma tasa de inversión generará mayor crecimiento. Así aumentan las tasas de crecimiento del capital y del PIB. Obviamente este es un caso simple en el cual el aumento de la tasa de crecimiento es consecuencia de un desastre y ciertamente el bienestar es menor ya que la economía solo crece más rápido para recuperar lo recién perdido, como resultado de la mayor productividad del capital.

Esta es la explicación que se ha usado para el rápido crecimiento de Alemania y Japón después de la Segunda Guerra Mundial. Es una buena explicación para los años inmediatos, pero no es suficiente cuando la economía ya ha recuperado sus niveles de capital previos a la guerra, que en ambos países ocurre a mediados de la década de 1950. En años posteriores, particularmente en Japón, el crecimiento se mantuvo muy alto, reduciendo así la brecha de productividad que tenía con Estados Unidos desde antes de la guerra, y le permitió llegar a ser de las economías más ricas del mundo. Obviamente, la historia de destrucción de parte del stock de capital, y de la mano de obra también, no es suficiente

[14] Esto fue discutido en el contexto de la restricción presupuestaria del gobierno en el capítulo **??** y de la condición de solvencia externa en el capítulo **??**.

para explicar esta experiencia de crecimiento, pues también la productividad creció más rápido.

(B) Mayor crecimiento de la población

Supondremos que la tasa de crecimiento de la población aumenta de n_1 a n_2. Esto significa que para mantener el mismo nivel de capital per cápita la economía tiene que invertir más, pues este se deprecia más rápidamente en términos por unidad de trabajador. Para mantener un nivel dado de capital per cápita ahora es necesario acumular más capital, lo que se logra con un capital marginalmente más productivo, o sea el stock de capital sería menor. Por lo tanto el nivel per cápita en estado estacionario cae de $\tilde{k}_1^*$ a $\tilde{k}_2^*$ (ver figura 11.7)[15]. Sin embargo en el largo plazo el producto, consumo y capital siguen creciendo a la misma tasa de antes del aumento de la tasa de crecimiento de la población, es decir, a x/α.

Dada la tasa de ahorro de esta economía, y obviando el caso en el cual la economía puede haber partido con mucho capital (mayor al de la regla dorada), la caída del stock de capital producirá una caída en el producto y en el consumo de largo plazo, y en la transición hacia el nuevo estado estacionario la economía experimentará una reducción en su tasa de crecimiento per cápita.

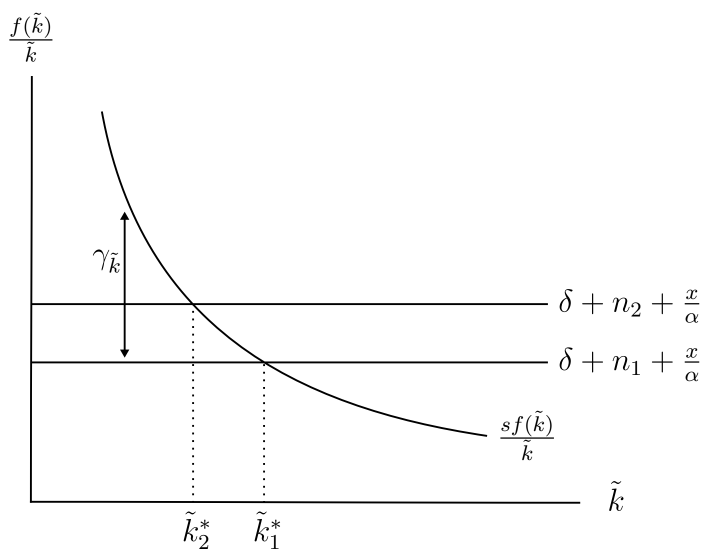

Figura 11.7: Aumento de la tasa de crecimiento de la población con progreso técnico.

[15] En este caso suponemos que el aumento de la población no tiene ningún efecto sobre el progreso técnico.

(C) Aumento de la tasa de ahorro

Consideremos una economía que se encuentra en estado estacionario, como se puede apreciar en la figura 11.8, con una tasa de ahorro s_1. Suponga que esta tasa aumenta exógenamente a s_2. Cuando la tasa de ahorro aumenta se llega a un estado estacionario con mayor capital, de $\tilde{k}_1^*$ a $\tilde{k}_2^*$, y consecuentemente con un producto per cápita mayor. También se producirá un aumento en la tasa de crecimiento durante la transición a este nuevo estado estacionario. Como la economía ahorra más, en el estado estacionario original, la inversión supera la depreciación permitiendo que el capital crezca. Esto significa que durante la transición esta economía invierte el mayor capital ahorrado, trayendo como consecuencia que el capital de estado estacionario aumente.

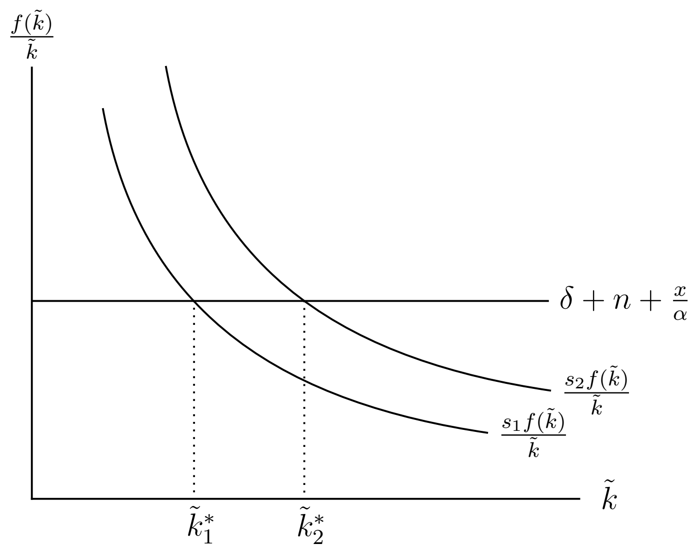

Figura 11.8: Efecto de un aumento de la tasa de ahorro.

Sin embargo, a medida que el capital se va acumulando cae su retorno y en el largo plazo el PIB per cápita de esta economía sigue creciendo a la misma tasa de antes, es decir x/α. El mayor crecimiento ocurre en la transición, la cual puede ser muy larga.

Por último, de acuerdo con nuestra discusión sobre la regla dorada, se puede concluir que no es claro lo que pasará con el consumo per cápita de largo plazo, y depende de la posición respecto de la regla dorada. En todo caso, es necesario repetir que en países en vías de desarrollo claramente un aumento del ingreso de largo plazo es beneficioso, porque difícilmente tienen exceso de capital al inicio. No obstante, hay un *tradeoff* en la transición. En el instante que esta economía pasa de s_1 a s_2, el stock de capital y el producto son los mismos, por lo tanto el consumo al principio cae, lo cual no aumenta el bienestar. Esto es obvio si se piensa que dado el ingreso, un aumento del ahorro necesariamente requiere reducir los gastos. Si como producto de esto el ingreso es más elevado, en el futuro se puede tener que aumente el ahorro, el consumo y el bienestar. Para que el ahorro conduzca a un aumento del bienestar, casi sin excepciones, es preciso que el ahorro lleve a más crecimiento en el largo plazo, lo que requiere salir del modelo neoclásico a modelos de crecimiento endógeno que se revisan en el siguiente capítulo.

(D) Aumento progreso técnico

En este caso analizamos los efectos de un aumento de la tasa de crecimiento de la productividad de x_1 a x_2, algo más complicado que lo analizado hasta ahora. Las consecuencias en el gráfico son similares al caso analizado en la parte (B), es decir, el capital por unidad de eficiencia cae de $\tilde{k}_1^*$ a $\tilde{k}_2^*$. El ingreso de largo plazo por unidad de eficiencia también caerá como resultado de la caída en $\tilde{k}$. Dada la tasa de ahorro se puede verificar que $\tilde{c}$ también cae. Esto puede sonar paradójico: la economía tiene un crecimiento de la productividad más acelerado y $\tilde{c}$ cae, con lo cual alguien podría pensar que el bienestar cae. Sin embargo, esto no es así, ya que lo que nos interesa desde el punto de vista de bienestar es el consumo per cápita (c) y no por unidad de eficiencia ($\tilde{c}$). Por eso centraremos el análisis en determinar qué sucede con el consumo y el nivel de capital per cápita.

Supondremos que en $t = 0$, la productividad aumenta de x_1 a x_2, en cuyo caso se tiene que

$$\frac{\Delta \tilde{k}}{\tilde{k}} = -\frac{\Delta x}{\alpha} = -\frac{(x_2 - x_1)}{\alpha}.$$

Por otra parte sabemos que

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta \tilde{k}}{\tilde{k}} + \frac{x_2}{\alpha}.$$

Juntando estos dos términos obtenemos que

$$\frac{\Delta k}{k} = -\frac{(x_2 - x_1)}{\alpha} + \frac{x_2}{\alpha} = \frac{x_1}{\alpha}. \tag{11.19}$$

Es decir, cuando aumenta la tasa de crecimiento del progreso técnico (en $t = 0$), el nivel de capital per cápita sigue creciendo a la tasa x_1/α en el instante del cambio de x y después su tasa de crecimiento debe aumentar gradualmente a

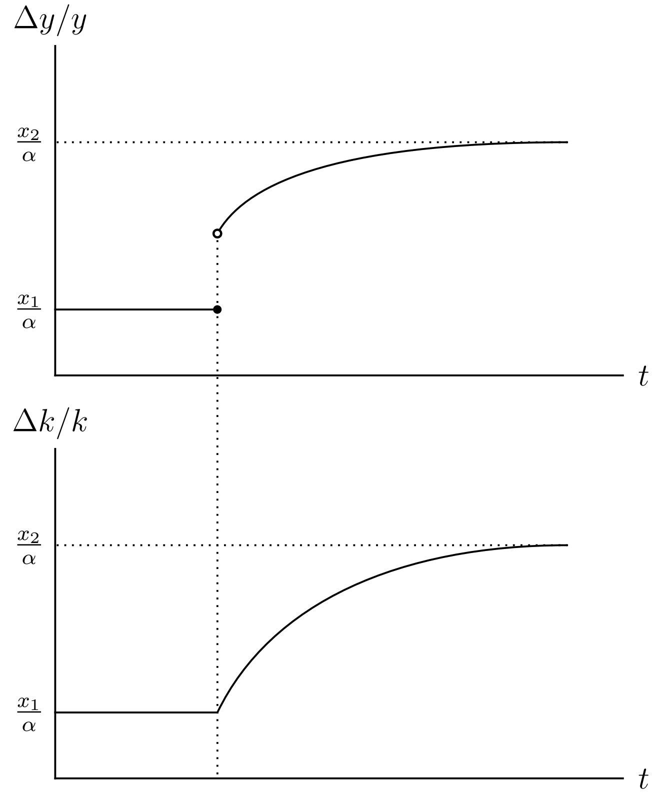

Figura 11.9: Aumento de la tasa de crecimiento de la productividad.

x_2/α. Para analizar qué sucede con el producto per cápita, recordemos que éste está dado en términos per cápita por $y = Ak^{1-\alpha}$. Diferenciando esta expresión y dividiendo por $Ak^{1-\alpha}$ obtenemos que (aproximando los diferenciales a Δ)

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta A}{A} + (1-\alpha)\frac{\Delta k}{k}.$$

Reemplazando la ecuación (11.19) en la ecuación anterior se llega a que

$$\frac{x_1}{\alpha} < \frac{\Delta y}{y} = \frac{x_1}{\alpha} + (x_2 - x_1) < \frac{x_2}{\alpha}.$$

Es decir, la tasa de crecimiento del producto aumenta discretamente en el momento del cambio de x, pero por debajo de x_2/α, y luego su crecimiento se ajusta gradualmente a x_2/α. Estos dos resultados se pueden apreciar en la figura 11.9.

¿Qué pasa con el consumo per cápita? Claramente aumenta, ya que el producto siempre aumenta, y el consumo no es más que una fracción del ingreso.

Por lo tanto podemos concluir, como era de esperar, que una mayor tasa de crecimiento de la productividad aumenta el crecimiento y el bienestar desde el instante en que sube la productividad.

Problemas

Problema 11.1. Crecimiento.
Considere una economía con los siguientes datos en un período:

$\frac{I}{Y} \equiv i = 30\,\%$	tasa de inversión bruta
$\gamma = 5{,}5\,\%$	tasa de crecimiento del PIB agregado
$\frac{K}{Y} = 2{,}5$	razón capital-producto al inicio del período
$\delta = 5\,\%$	tasa de depreciación
$\hat{L} = 2\,\%$	tasa de crecimiento del empleo

Suponga además que la función de producción es

$$F(K,L) = K^{1-\alpha}L^{\alpha},$$

con $\alpha = 0{,}6$.

(a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del stock de capital?

(b) Usando la contabilidad del crecimiento, determine cuál fue el crecimiento de la productividad total de factores durante ese período (denótelo por x).

(c) Si esta economía quisiera crecer un 8 % en vez del actual 5,5 %, dados constantes los valores de x y $\hat{L}$, determine a cuánto tendría que subir la tasa de inversión.

(d) Considere que x es el valor del crecimiento de la productividad de largo plazo. Suponga además que la población crece a la misma tasa que el empleo. ¿Cuál es el crecimiento de largo plazo del producto per cápita y del producto agregado en esta economía? Compárelo con el crecimiento actual e interprete la diferencia de acuerdo con el modelo neoclásico de crecimiento.

(e) Suponga que la tasa de ahorro de la economía es $s = 30\,\%$ y considere que no hay gobierno. ¿Es este supuesto razonable? ¿Cuál es la relación capital-producto a la cual converge la economía? Recuerde que la relación capital-producto de largo plazo puede expresarse cómo una función de s (y otros parámetros).

(f) Calcule la tasa de ahorro consistente con la regla dorada. ¿Cómo se compara con el 30 % supuesto en este problema? ¿Cómo se compara a la calculada en la parte (c)? ¿Podría argumentar, suponiendo estado estacionario, que el 30 % o el valor encontrado en la parte (c) son subóptimos? ¿Por qué?

Problema 11.2. Cuando los capitalistas ahorra más que los trabajadores.
Considere una economía cuya función de producción depende de capital y trabajo y suponga que los factores de producción reciben como pago el valor de sus productividades marginales. Al igual que en el modelo de Solow, supondremos que la tasa de ahorro es exógena. A diferencia de dicho modelo, supondremos que todo el ahorro lo realizan los capitalistas, quienes ahorran una fracción s de sus ingresos.

(a) Determine el nivel de k estacionario de esta economía. Muestre que si $s = 1$, este corresponde al nivel de la regla dorado.

(b) Muestre que a diferencia del modelo de Solow, en este caso no son posibles equilibrios dinámicamente ineficientes. Explique su resultado.

Problema 11.3. Análisis posguerra.
Describa los efectos que predice el modelo de Solow en el período después de la guerra si:

(a) Durante esta se produjo una destrucción del capital.

(b) Las bajas durante la guerra redundaron en una disminución de la mano de obra.

Considere el efecto de ambas hipótesis por separado.

Problema 11.4. Modelo de Solow con migración.
Basado en el capítulo 9 de **barro.sala-i-martin2003economic**. Bajo los supuestos del modelo de Solow, considere el caso de una economía cerrada en la cual existe la posibilidad de migraciones tanto hacia dentro como hacia afuera del país. El flujo de inmigrantes (denotado por M) es

$$M(K,L) = K - \overline{k}L. \tag{11.20}$$

(a) Entregue una interpretación económica de esta ecuación. Además, escriba el flujo en términos per cápita e interprete el significado del parámetro $\overline{k}$.

(b) Determine la tasa de crecimiento de la población en este modelo.

(c) Suponga además que cada inmigrante trae (o se lleva) una cantidad k_0. Determine la dinámica de Solow en términos per cápita para este modelo. Encuentre la expresión para el stock de capital per cápita en estado estacionario y grafíquela. ¿Existe convergencia condicional?

(d) Considere ahora que los inmigrantes prácticamente no traen (o se llevan) capital consigo al momento e irse del país. Determine y grafique el estado estacionario. ¿Existe convergencia condicional?

(e) A partir de su respuesta en (c) determine qué ocurre con el capital per cápita de estado estacionario si k_0 aumenta o disminuye. Interprete este resultado.

Problema 11.5. Modelo de Solow con deuda pública.

En el modelo de Solow, suponga que el gobierno mantiene un nivel de deuda pública per cápita constante igual a $b \geq 0$. Es decir, en cada instante el gobierno vende b bonos a cada agente privado y recibe a cambio b unidades del único bien en la economía. El ahorro privado es una fracción s del total disponible por el sector. Las recaudaciones que obtiene el gobierno no son ahorradas por este.

(a) Muestre que para valores de b pequeños habrá dos estados estacionarios, de los cuales solo uno es estable.

(b) Denote el nivel de capital per cápita de este último por $k^*(b)$. Muestre que $k^*(b)$ es menor que el nivel de k^* cuando no hay deuda pública. Dé una interpretación económica de su resultado.

(c) ¿Qué sucede para valores grandes de b? También entregue una interpretación al respecto.

Problema 11.6. Modelo de Solow con impuesto al ingreso.

Basado en el capítulo 2 de **sala-i-martin2000apuntes**. En el modelo de Solow suponga que el gobierno cobra un impuesto de tasa T al ingreso de la empresas que tienen una función de producción dada por

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

e invierte una fracción v de lo recaudado.

(a) Describa en términos per cápita la dinámica de esta economía.

(b) Calcule el capital $k^*(v)$ en el estado estacionario.

(c) Calcule el capital k^* si no hubiera impuesto a las empresas.

(d) ¿Para qué valores de v es $k^*(v)$ mayor que k^*?

Problema 11.7. Crecimiento e impuestos.
Considere una economía sin crecimiento de la población (con lo que podemos normalizar la población a 1) con la siguiente función de producción:

$$y = f(k) = Ak^{1-\alpha},$$

donde el capital se deprecia a una tasa δ.

El gobierno gasta un flujo g, el cual es financiado con una tasa de impuesto τ proporcional al ingreso (se recauda τy). El gobierno sigue una política de presupuesto equilibrado, o sea que en todo momento los ingresos de gobierno son iguales a sus gastos.

Las personas ahorran una fracción s de su ingreso disponible (neto de impuestos).

(a) Escriba la restricción de recursos de esta economía (demanda agregada igual producción o ahorro igual inversión).

(b) Determine el stock de capital de estado estacionario (k^*). Determine también el consumo (c^*) y la producción (y^*) de estado estacionario.

(c) Discuta intuitivamente el efecto que tienen los impuestos sobre el capital de largo plazo y discuta qué pasa con el crecimiento en la transición. Para esto último compare dos economías que tienen distintos τ, uno alto y uno bajo, y suponga que ambas parten de un nivel de capital menor que el capital de largo plazo. ¿Cuál de las dos economías crece más rápido?

(d) Considere una economía sin impuestos ni gasto de gobierno. ¿Cuál es el nivel de capital de la regla dorada (k^{RD})? Compare el nivel de capital de estado estacionario de la regla dorada con k^* de la parte (b). Determine cuál debería ser la tasa de impuesto (que si es negativa sería un subsidio) para que se llegue a la regla dorada. Discuta su resultado considerando la tasa de ahorro s y como se compara con la tasa de ahorro requerida para llegar a la regla dorada.

(e) Ahora cambiaremos un poco el problema para suponer que el gasto de gobierno es productivo, pero sujeto a congestión (piense en un camino). En consecuencia, la productividad total de los factores A es una función creciente de $g/y = \tau$, es decir $A = A(\tau)$ con $A' > 0$ y $A'' < 0$. Más aún asumiremos que $A(\tau) = B\tau^{\epsilon}$. Calcule la tasa de impuesto que maximiza el consumo de estado estacionario. Comente intuitivamente por qué el impuesto óptimo no es 0.

Problema 11.8. Crecimiento, ahorro y productividad.
Considere una economía que tiene la siguiente función de producción:

$$Y_t = AL_t^{\alpha}K_t^{1-\alpha} \tag{11.21}$$

donde Y es producción, L trabajo, K capital y A la productividad total de los factores. La tasa de ahorro de esta economía es $s = 18\,\%$, la tasa de crecimiento de población $n = 2\,\%$, la tasa de depreciación es $\delta = 4\,\%$, y la tasa de crecimiento de la productividad es cero. La participación del trabajo α es 0,7.

(a) En el estado estacionario: ¿A cuánto crece el producto en esta economía?¿y el producto per-cápita?

Normalice la productividad total de los factores a 1 y determine la razón capital-producto, el nivel de ingreso per-cápita y el consumo per-cápita en estado estacionario. Para esto deberá escribir la ecuación que determinar la evolución de capital y evaluarla en estado estacionario.

(b) Suponga que, por alguna razón no especificada, la tasa de ahorro sube a 21 %. Calcule la razón capital-producto, el nivel de ingreso per-cápita y el consumo per-cápita en el nuevo estado estacionario. ¿Qué ocurre con la tasa de crecimiento del producto en el nuevo estado estacionario?

(c) Determine que pasa con el consumo y el crecimiento de la actividad en el instante en que se produce el aumento de la tasa de ahorro de 18 a 21 %. (para determinar el crecimiento use una descomposición de Solow).

(d) Suponga que la productividad total de los factores (A) sube en un 4 %, que pasa con el producto per-cápita y el consumo per-cápita en el nuevo estado estacionario. (Considere que la tasa de ahorro de 18 %). Compare su resultado de esta parte con el de la anterior ((d)) y que podría inferir respecto del bienestar en ambos casos, es decir ¿Qué será mejor, aumentar el ahorro de 18 a 21 % o aumentar la productividad en un 4 %?.

(e) Suponga que la tasa inicial de ahorro es 30 %, y sube a 36 %, que ocurre con el ingreso y consumo per-cápita en el nuevo estado estacionario con respecto al anterior (mantenga A normalizado en 1, es decir como en (a)). Compare y discuta.

Problema 11.9. Crecimiento y productividad.
Suponga una economía donde se tiene la siguiente función de producción:

$$Y_t = A_t K_t^{0,5} L_t^{0,5} \tag{11.22}$$

La productividad total de los factores es A y crece a una tasa x, la tasa de depreciación del capital es δ, el crecimiento del empleo es n y s es la tasa de ahorro.

(a) Cual es la razón capital-producto de equilibrio. Cuál es el valor del producto por trabajador (o producto per cápita que aquí son iguales) en estado estacionario como función de s, n, δ, A y x (para ello debe primero encontrar el capital por trabajador - o unidad de eficiencia de trabajo- de estado estacionario).

(b) En estado estacionario (para contestar esto no necesita derivaciones especiales, basta entender como es el equilibrio): ¿A cuánto crece el consumo, capital y el producto por unidad de eficiencia?¿A cuánto crece el consumo, capital y producto en términos per-cápita?¿A cuánto crece el consumo, capital y producto total?

(c) ¿Cuál es el nivel de capital por unidad de eficiencia en la regla dorada? Compárelo con el capital por unidad de eficiencia de trabajo en esta economía. Discuta.

En lo que sigue suponga que la tasa de crecimiento del trabajo es 1 %, la depreciación es 3 % y el crecimiento del PIB es 5 %.

(d) Determine la tasa de crecimiento de A. Si la tasa de ahorro sobre el PIB es de 10 %. Calcule la razón capital-producto de estado estacionario y el valor del producto por trabajador en el estado estacionario en términos de A (usando su resultado en (a)), llámelo $\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)_a$.

(e) Si la tasa de ahorro sobre el PIB sube a 16 %. Calcule la razón capital-producto de estado estacionario y el valor del producto por trabajador en el estado estacionario en términos de A (usando su resultado en (a)), llámelo $\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)_b$. Calcule cuánto aumenta el producto por trabajador en estado estacionario, según lo encontrado (d) y (e). Discuta: ¿A qué se debe esta diferencia?¿Son distintas las tasas de crecimiento de la economía? ¿En qué momento se observan los efectos en el cambio del ahorro?.

Problema 11.10. Terremoto en el modelo de Solow.
Considere una economía que parte en estado estacionario. Normalice al inicio $L = 1$. La función de producción es:

$$Y_t = L_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha}. \tag{11.23}$$

La tasa de ahorro es 20 %, la tasa de depreciación es 5 % y la tasa de crecimiento de la población es 5 %.[16] El parámetro α es igual a 0.6.

(a) Cuál es el coeficiente capital producto de estado estacionario. ¿Cuál es la tasa de creimiento del producto per cápita y del producto total en estado estacionario?.

(b) Suponga que hay un terremoto devastador cuya destrucción de capital es de 10 % del PIB (inicial). ¿Qué porcentaje del capital se destruye y cuánto es la caída porcentual del producto?.

(c) Si la tasa de ahorro y el resto de los parámetros son los mismos después del terremoto ¿A cuánto subirá la tasa de crecimiento del PIB y del capital (er cápita y total)después del terremoto, explique por qué?

Problema 11.11. Crecimiento y ahorro.
Considere una economía donde la tasa de ahorro $s = 0{,}2$, la tasa de depreciación del capital $\delta = 0{,}03$, el crecimiento de la población $n = 0{,}015$, la tasa de crecimiento de la productividad total de los factores es $x = 0{,}015$, y la función de producción es $Y_t = A_t L_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha}$, donde $\alpha = 0{,}6$.

(a) Escriba (o derive) la ecuación de acumulación de capital por unidad de eficiencia $\tilde{k}$. Derive la razón capital producto, el nivel de capital y el PIB por unidad de eficiencia de estado estacionario. Encuentre sus valores numéricos. ¿A cuánto crece el PIB en esta economía, y el PIB per cápita?

[16] Obviamente la tasa de crecimiento de la población es muy alta, pero es para hacer la presentación más sencilla y subsumiendo en n el crecimiento de la productividad para simplificar la presentación, de modo que pueda asumir que no hay crecimiento de la productividad, solo n (ampliado).

(b) Suponga que por alguna razón cualquiera (reforma tributaria, caída ahorro público, etc.) la tasa de ahorro cae en 2 puntos porcentuales a 18 %. Rehaga sus cálculos de la parte (a) y determine en qué porcentaje caen en el largo plazo el stock de capital y el PIB (¿hay alguna diferencia si es total, per cápita o por unidad de eficiencia?). ¿Cuál es el impacto de esta caída del ahorro sobre el crecimiento de largo plazo?

(c) Suponga que la economía de (a) está en estado estacionario y cae la tasa de ahorro como en (b). Calcule, a partir de la ecuación de acumulación, la tasa de crecimiento del stock de capital por unidad de eficiencia ($\tilde{k}$) en el período que se produce la caída de la tasa de ahorro. Luego, usando la información sobre la tasa crecimiento de la productividad y la tasa de crecimiento de la población dadas en el enunciado calcule la tasa de crecimiento del capital total (K). Finalmente usando este resultado y la descomposición de Solow puede calcular que pasará con la tasa de crecimiento del PIB total en el período que cae el ahorro. Grafique—en una figura como la vista en clases donde en el eje vertical está la tasa de crecimiento del capital por unidad de eficiencia—cómo será la evolución del crecimiento en los períodos futuros y a qué tasa de crecimiento converjera en el largo plazo la economía (crecimiento del PIB total, Y).

Problema 11.12. Modelo de Solow.

Considere el modelo de crecimiento de Solow donde no hay crecimiento de la población ni crecimiento de la productividad. La tasa de ahorro es $s = 0{,}2$ y la tasa de depreciación es $\delta = 0{,}05$. Denote por k el capital per cápita; y el producto per cápita; c el consumo per cápita; i la inversión per cápita. La función de producción corresponde a

$$Y_t = K_t^{\frac{1}{3}} L_t^{\frac{2}{3}}.$$

(a) Reescriba la función de producción en términos per cápita. Encuentre el stock de capital per cápita de estado estacionario, k^*.

(b) Encuentre el stock de capital per cápita de la "regla dorada", k^{RD}. Recuerde que k^{RD} maximiza el consumo per cápita en estado estacionario, c^*.

(c) Suponga que un planificador social benevolente desea implementar $k = k^{RD}$. ¿Cuál es la tasa de ahorro s^{RD} que debe imponer el planificador social benevolente para implementar k^{RD}.

(d) Suponga ahora que la función de producción corresponde a

$$Y_t = A_t K_t^{\frac{1}{3}} L_t^{\frac{2}{3}}$$

donde A_t es la productividad total de los factores, la cual suponemos crece a una tasa exógena x es decir, $A_{t+1} = (1 + x)A_t$. También supondremos que la población crece a una tasa exógena n, con $L_{t+1} = L_t(1+n)$. Los demás parámetros son los mismos del problema original ($s = 0{,}2$ y $\delta = 0{,}05$). Encuentre el capital de estado estacionario en unidades de eficiencia $\tilde{k}$ y la tasa de crecimiento del producto per cápita en estado estacionario γ_y si $x = 0{,}05$ y $n = 0{,}03$.

Ind.:Recuerde que $E_t = A_t^{1/\alpha} L_t$ donde el término E se conoce como las unidades de eficiencia de trabajo y α corresponde al exponente de L_t en la función de producción.